ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Спиридонова Екатерина Владимировна

Численно-аналитическое решение плоских задач теории трещин со смешанными краевыми условиями

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.т.н., доцент
Полкунов Юрий Григорьевич

Оренбург 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

Глава 1 Краевые задачи теории трещин в геомеханике 11

1.1 Линейные краевые задачи теории трещин 11

1.2 Метод разрывных смещений 20

1.3 Применение решений краевых задач теории трещин к расчету коэффициентов интенсивности напряжений 26

1.3.1 Аналитические методы расчета коэффициентов интенсивности напряжений 27

1.3.2 Численные методы расчета коэффициентов интенсивности напряжений 30

1.4 Анализ избранных моделей разрушения материалов 32

1.5 Формирование трещиноватости в геоматериалах 36

1.6 Выводы к первой главе 39

Глава 2 Численный анализ распределений разрывов смещений берегов трещин 40

2.1 Типизация плоских краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями 40

2.2 Алгоритм решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями и расчета коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода 43

2.3 Программный комплекс расчета раскрытий трещины 45

2.4 Анализ идентичности распределений разрывов смещений берегов раскрывающихся трещин на примере трещины в песчанике 55

2.5 Качественный анализ решений краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями 63

2.6 Выводы ко второй главе 81

Глава 3 Математические модели раскрытия плоских трещин смешанного типа в геоматериалах 82

3.1 Аппроксимация раскрытий зияющей части трещины, коэффициентов интенсивности напряжений и сравнение результатов вычислительного эксперимента с аналитическими решениями Г.П.Черепанова 82

3.2 Модель развития трещины отрыва с различной длиной основной и зияющей частей трещины и переменной длиной всей трещины 89
3.3 Модель развития трещины в трещиноватом массиве при постоянной сумме длин зияющей части и расстояния до наклонной трещины 92
3.4 Модель развития трещины с линейными и параболическими функциями нормальных смещений берегов основной части 99
3.5 Модель развития трещины в условиях сжатия и сдвига ее берегов 105
3.6 Модель развития плоской трещины: общий случай 114
3.7 Выводы к третьей главе 118
Заключение 119
Сокращения и обозначения 121
Список литературы 122
Приложение А. Идентичность субкомбинаций смещений 133
Приложение В. Программный комплекс моделирования раскрытия трещины 146

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Проектирование и строительство крупных инженерных сооружений, особенно в горных районах с повышенной сейсмической активностью и сложным геологическим строением, требуют надежного инженерно-геологического обоснования проектных решений, базирующихся на расчетах прочности и устойчивости системы сооружение-основание [37]. Для проведения расчетов или физического моделирования этих систем необходима инженерно-геологическая модель основания, содержащая информацию о структуре массива (геоструктурная модель) и физико-механических свойствах среды (модели свойств) с соответствующей для расчетов и экспериментов степенью схематизации без нарушения принципиальных особенностей среды [121]. Геоструктурная модель основания отражает состав, структуру и состояние массива, и составляется на основе результатов инженерно-геологических изысканий и исследований скальных массивов комплексом методов: геолого-съемочных, геофизических, горно-буровых, полевых и лабораторных исследований состава и свойств пород.

Массив обладает определенной внутренней структурой, составом, состоянием пород и конкретными характеристиками свойств. В каждом скальном массиве присутствует пространственная неравномерная сеть тектонических разрывных нарушений и трещин разных размеров, играющих роль зон местной деконцентрации естественных напряжений, повышения водопроницаемости, уменьшения характеристик прочностных и деформационных свойств массива. Трещиноватость является результатом длительной истории формирования системы трещин, их развития и разрушения породы, этапы которой нередко повторялись во времени. В настоящее время общепризнано, что любой скальный массив является дискретной, неоднородной и анизотропной средой зонально-блочного строения. При этом неравномерность развития трещин в массивах определяется многими факторами, в частности, неоднородностью и анизотропностью структуры, текстуры пород, элементов залегания и физико-механических свойств литолого-

петрологических разновидностей пород, слагающих различные прослои, слои, пакеты, комплексы, толщи.

Известно, что горные породы разрушаются в результате нормального отрыва, сдвига, скалывания и среза. При этом во время сжатия разрушение происходит в основном в результате скалывания, а при растяжении – в результате нормального отрыва. Поэтому задачи, связанные одновременно со сжатием и сдвигом трещины скального массива, представляют особый интерес и находят практическое применение при строительстве зданий и сооружений, геомеханике горных пластов, устойчивости бортов карьеров и выработок, поиске и разработке месторождений полезных ископаемых, оценки последствий горных ударов и землетрясений. В частности, для нефтегазовых месторождений трещины и поры горных пород во многом определяют содержание углеводородов [14].

Экспериментальные данные геофизических исследований показали, что при сжатии и сдвиге в трещинах горного массива возникают нормальные раскрытия и сдвиги по ее берегам. Для описания данного процесса известны модели, в которых к берегам основной трещины приложены напряжения, а в рамках модели устанавливается связь между напряжением и раскрытием зияющей трещины:

модель пилообразной трещины [97,88,120,20],

модели Гудмана [88,111,110],

дилатансионная модель [46,88,20],

вязкопластическая модель [28],

модель Андерсона [84,103],

модели Чиннэри [84,105–107],

модель Маруяма [84,118].

В настоящее время разрывные смещения породы определяются в основном с помощью периодически возобновляемых геодезических измерений, а также путем физического моделирования на образцах из эквивалентных материалов. Данные эксперименты проводят для контроля сдвижения земной поверхности, для обеспечения безопасной работы газо- и нефтепроводов, реакторов АЭС, железных

дорог, туннелей, плотин, мостов, линий электропередач и других инженерных сооружений и коммуникаций.

Трещины нормального отрыва и трещины сдвига являются частным случаем трещины смешанного типа. Исследованию трещин отрыва и сдвига посвящено множество работ российских и зарубежных ученых, включая работы известного механика Г.П.Черепанова. В его работах можно найти большое количество аналитических выкладок, касающихся описания развития трещины отрыва. Но трещины смешанного типа не рассматривались в связи со сложностью математических вычислений и необходимости совершенствования математических основ механики разрушения. В связи с этим разработка математических моделей развития трещин смешанного типа является актуальной задачей механики и геомеханики, так как позволяет выйти на новый класс задач, который невозможно решить аналитическими методами и который позволяет описать развитие трещин с механизмом хрупкого разрушения в горных породах и других материалах.

Целью диссертационной работы является численное решение ряда краевых задач о раскрытии берегов плоской трещины смешанного типа в твердых телах, построение аппроксимирующих функций смещений берегов трещины в аналитическом виде и вычисление коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) 1-го и 2-го рода.

Основными задачами работы являются:

1. Анализ аналитических и численных методов решения линейных краевых задач теории трещин, методов вычисления КИН 1-го и 2-го рода, избранных математических моделей разрушения материалов.

2. Создание алгоритма и программы в Borland Delphi 6.0 для численного решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями.

3. Качественный анализ численных решений краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями для широкого диапазона значений модуля Юнга ($10^6 \div 10^{13}$ Па) и коэффициента Пуассона ($0.1 \div 0.49$), с учетом и без учета действия массовых сил.

4. Аппроксимация раскрытий берегов трещины и построение аналитических выражений КИН 1-го и 2-го рода в виде предельных соотношений согласно работам А.М. Линькова.

5. Оценка состояния развития трещины смешанного типа в геоматериалах на основе силового критерия хрупкого разрушения по результатам решения краевых задач методом разрывных смещений.

Методология и методы исследований. Для решения краевых задач теории трещин применяется одна из разновидностей метода граничных элементов - метод разрывных смещений. Численное решение, визуализация решения и его анализ реализованы в Borland Delphi 6.0. Для аппроксимации разрывов смещений берегов в виде непрерывных функций используется метод наименьших квадратов. Аналитические выражения нормальных раскрытий Черепанова и вышеуказанные формулы, приведенные в работах Линькова, используются в исходном виде.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Разработан комплекс программ для численных расчетов по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины смешанного типа (одиночной; в трещиноватом массиве) и для проведения анализа идентичности распределений раскрытий берегов в присутствии и отсутствии массовых сил, включающий решение методом разрывных смещений.

2. Проведен анализ идентичности распределения раскрытий трещин смешанного типа в песчанике под действием массовых сил и в их отсутствии. По результатам анализа определены субкомбинации краевых условий, для которых имеется полная (r=0.001%) и частичная (r=30%) идентичность распределения раскрытий и обнаружена взаимозаменяемость функций распределения раскрытий берегов с однотипными краевыми условиями.

3. В рамках исследования полной идентичности раскрытий берегов трещины расширена область применения аналитических выражений Г.П.Черепанова (раскрытия берегов трещин нормального отрыва) в отношении трещин смешанного типа.

4. На основе анализа результатов численных решений, полученных при варьирования значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона в широком диапазоне допустимых значений, установлены закономерности смещений берегов трещины в продольном и поперечном направлениях. При изменении механических характеристик – модуля Юнга и коэффициента Пуассона, - наблюдается квазилинейная зависимость смещений от модуля Юнга и нелинейная (монотонная или с одним экстремумом) зависимость от коэффициента Пуассона.

5. Получены аппроксимации функции нормальных и касательных смещений берегов трещины и аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода для избранных краевых задач теории трещин смешанного типа в отсутствии действия массовых сил.

Теоретическая и практическая значимость работы. Представленные в диссертации результаты решения краевых задач теории трещин смешанного типа свидетельствуют о том, что численно решен ряд задач теории трещин, для которых недоступно аналитическое решение. Решения получены при значениях механических характеристик материалов, охватывающих как обычные упругие материалы, так и геоматериалы, в которых трещины образуются непосредственно под действием сил тяготения. При этом взяты свойства материалов в широком диапазоне изменений значений модуля Юнга (от резины до сверхупругих материалов) и коэффициента Пуассона (от слабосжимаемых до практически несжимаемых материалов). Результаты некоторых из них разобраны подробно в отдельной главе.

Практическая значимость состоит в том, что применительно к геоматериалам есть возможность прогнозирования появления критических смещений породы, при которых происходит разрушение материалов с учетом их прочностных характеристик, что позволяет дать оценку устойчивости бортов карьеров, подземных сооружений (выработок), откосов, отвалов и др.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Алгоритм решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями и расчета КИН 1-го и 2-го рода для сплошных и нарушенных трещиноватостью материалов.

2. Комплекс программ для численного решения плоских задач теории трещин по определению разрывов смещений ее берегов (одиночной; в трещиноватом массиве) и для проведения анализа идентичности распределений раскрытий берегов в присутствии и отсутствии массовых сил, включающий решение методом разрывных смещений.

3. Аналитические выражения раскрытий берегов трещины, образованные аппроксимирующими полиномами, зависящими от координат расчетных точек и граничных условий задачи.

4. Коэффициенты интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода для сплошной и нарушенной среды, пропорциональные функциям распределения раскрытий вблизи вершины зияющей части трещины, включающие численно найденные смещения и напряжения на берегах трещины.

Степень достоверности результатов определяется следующим:

1. В диссертации используются математически корректные постановки задач на основе фундаментальных уравнений упругости и механики хрупкого разрушения.

2. Численное решение краевых зада получено с помощью апробированного метода – метода разрывных смещений.

3. Величина погрешности оценивалась на базе исследования идентичностью результатов расчета раскрытий трещины нормального отрыва как частного случая трещины смешанного типа с аналитическими выражениями раскрытий Г.П. Черепанова.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: школа-семинар «Современные проблемы механики и прикладной математики» (Воронеж, 2007); 3-я и 4-я Всероссийская научно-практическая конференция «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» (Оренбург, 2007 и 2009); международная конференция «Актуальные проблемы математики, информатики и механики» (Воронеж, 2009); научный семинар «Актуальные проблемы математического моделирования» под руководством доктора физ.-мат. наук, про-

фессора Радаева Ю.Н. (Самара, 2010); 2-я международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2010); всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики, математики, информатики» (Пермь, 2010); 10-я всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2010); 8-я всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2011); международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2014), семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Миронова Б. Г. (Чебоксары, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы отражены в 19 публикациях, в том числе 1 монография, свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ «Программный комплекс для численного решения плоских задач теории трещин со смешанными краевыми условиями», 5 статей изданы в журналах, которые входят в перечень издательств, рекомендованных ВАК РФ.

ГЛАВА 1

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В ГЕОМЕХАНИКЕ

1.1 Линейные краевые задачи теории трещин

Известно, что трещина в деформируемом твердом теле состоит их фронта трещины, на котором смыкают поверхности полости, и берегов трещины [49]. В окрестности фронта наблюдается наибольшая концентрация напряжений и происходит локальное разрушение материала. С точки зрения постановки и решения задач теории упругости берега трещины играют роль дополнительной границы тела и из-за малого расстояния между берегами реальную трещину можно рассматривать как математический разрез, т.е. полость нулевого объема, ограниченную двумя геометрически совпадающими поверхностям и – берегами разреза. Переход от полости к математическому разрезу осуществляется различными способами. В связи с этим изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности любой точки фронта трещины можно проводить в рамках плоской или антиплоской задачи теории упругости. При этом для решения задачи о развитии трещины принципиально не важна детализация границ трещины в микромасштабах и сущность процессов, протекающих в вершине трещины, т.к. достаточно знать характер и интенсивность напряженного состояния в области, окружающей вершину трещины, но принципиально важно знать асимптотическое решение задачи линейной теории упругости для разреза в плоскости или полуплоскости (полубесконечного разреза).

Исследованию смешанных контактных задач для полуплоскости посвящено большое количество работ и предложено значительное количество методов их решения. Этому способствовало и то обстоятельство, что конкретные задачи, с которыми приходится сталкиваться в теории упругости, при надлежащей их постановке в основном оказываются смешанными [2]. Такие задачи возникают при расчете сложных неоднородных конструкций, фундаментов и оснований соору-

жений, и относятся к контактным задачам. Смешанными являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок, задачи изгиба пластин и оболочек при сложных условиях опирания.

В работах, посвященных решению задач для полуплоскости, первоначально следует выделить те, в которых полуплоскость находится под давлением жестких штампов с прямолинейным горизонтальным (наклонным) и закругленным основаниями при отсутствии трения. Здесь можно отметить работы Н.И. Мусхелишвили [43,44], В.М. Абрамова [1], М.А. Садовского [123], А.И. Бегиашвили [5], А.В. Бицадзе [6] и других исследователей. Решение подобных контактных задач, но при наличии трения, производится в работах Н.И. Глаголева [15,16], Л.А. Галина [10-12], С.В. Фальковича [91].

В работе [68] автор показывает, что любое решение задачи о плоскости, ослабленной щелью, и находящейся под действием симметричной нагрузки, может быть рассмотрено как решение задачи для упругой плоскости, которая находится под действием штампов. Решение смешанной задачи для плоскости с прямолинейными разрезами, в которой на одном берегу трещины задаются смещения, а на другом берегу напряжения осуществляется в работах Н.И. Мусхелишвили [43] и Д.И. Шермана [101].

Задача о расклинивании плоскости полубесконечным разрезом, к берегам которого приложены постоянные разрывные смещения, с зияющей трещиной рассмотрена в работе Г.П. Черепанова [97] (основная часть содержит устье, а зияющая – вершину трещины). Расклинивание характеризуется перемещением берегов трещины и при достаточных усилиях приводит к разрушению. В связи с этим в работе [98] различаются типы поверхностей разрыва смещений. Если реализуется разрыв нормального к поверхности смещения, то трещина характеризует отрыв и является трещиной нормального отрыва, а если реализуется разрыв касательного к трещине смещения, то трещина является трещиной сдвига.

В рамках математического моделирования развитие поверхностей разрыва описывается заданными в начальный момент времени конечными возмущениями,

всегда присутствующими в системе и инициируемые в какой-то момент времени, который и может быть принят начальным. Дальнейшее развитие трещин в зависимости от приложенных нагрузок развивается различным образом. В рамках плоской теории упругости в работах Колосова-Мусхелишвили [43] представлено аналитическое выражение нормального раскрытия зияющей трещины в верхней полуплоскости. В работе [97] рассмотрена задача о расклинивании с зияющей трещиной отрыва, в которой на полубесконечном разрезе задавались постоянные нормальные смещения, а зияющая трещина находилась под действием сжимающих напряжений. В обеих задачах представлено аналитическое выражение нормального раскрытия зияющей трещины в верхней полуплоскости. С помощью асимптотического критерия можно записать коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины отрыва на оси ординат и найти длину трещины. Следует отметить, что данные задачи были решены в аналитическом виде и не учитывали структуру разрушаемого материала и влияние смешанного нагружения. Поэтому для таких задач поиск аналитических представлений КИН в задачах с СКУ, приложенными к берегам трещины, приобретает особую актуальность.

Теория трещин относится к математической теории хрупкого разрушения. В рамках теории, начиная с работ Гриффитса [43], предполагается, что тело подчиняется обобщенному закону Гука вплоть до разрушения. Интенсивное развитие теории хрупкого разрушения началось после работ Ирвина [113] и Орована [119]. Ими показано, что в большом числе практически важных случаев разрушение происходит таким образом, что пластическая область, хотя и существует, но имеет очень малые размеры и сосредоточивается в непосредственной близости поверхности трещины. В рамках теории трещин дифференциальные уравнения линейной упругости имеют следующий вид [43]:

уравнения статики в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y = 0; \tag{1.2}$$

уравнения совместности деформаций

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}; \tag{1.3}$$

закон Гука

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{xx}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)\right], \tag{1.4}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{yy}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)\right], \tag{1.5}$$

$$\sigma_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}; \tag{1.6}$$

компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \tag{1.7}$$

уравнения статики в смещениях

$$\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\rho g_x=0, \tag{1.8}$$

$$\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+\rho g_y=0. \tag{1.9}$$

В зависимости от типа граничных условий для системы уравнений (1.1)-(1.6) ставится 1-я краевая задача, для системы уравнений (1.3)-(1.9) ставится 2-я краевая задача, и в случае совместного использования напряжений и перемещений ставится краевая задача с СКУ. В настоящее время трещины рассматриваются как поверхности разрыва смещений в недеформированном теле, ограниченном берегами. При этом допускается, что вблизи произвольной точки берега трещины отрыва радиус кривизны контура мал по сравнению с размерами окрестности вблизи этой точки, а деформация в этой окрестности является плоской и соответствующей прямолинейному разрезу в бесконечном теле под действием некоторой системы симметричных относительно поверхности разреза нагрузок. Если принять отсчетным направление действия массовых сил в отрицательном направлении вдоль оси ординат, то в (1.1)-(1.9) имеем

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\mathbf{g}\| \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Здесь θ - острый угол между направлением вектора $\mathbf{g}$ и нормалью к серединной линии, эквидистантной относительно берегов трещины.

Вдоль серединной линии поверхность трещины можно условно разделить на две части – основную и зияющую [98]. В пределах внутренней части трещины противоположные берега отстоят далеко друг от друга, и поэтому практически не взаимодействуют между собой. Эту часть (основную) можно считать свободной от напряжений, обусловленных взаимодействием противоположных берегов. В концевой части, прилегающей к контуру трещины, противоположные берега близко подходят друг к другу, и поэтому силы сцепления имеют значительную интенсивность. В связи с этим математическое моделирование развития трещины основывается на двух гипотезах:

1) ширина концевой области мала по сравнению с размером всей трещины;

2) форма нормального сечения поверхности трещины в концевой области не зависит от действующих нагрузок и при одинаковых физических условиях одинакова для одного и тоге же материала.

Согласно второй гипотезе концевая область при расширении трещины как бы поступательно перемещается в другое место. При этом она применима только для тех точек контура трещины, где достигается максимально возможная интенсивность сил сцепления, так что при сколь угодно малом увеличении приложенных к телу нагрузок в этой точке происходит расширение трещины.

Напряженное состояние тела с трещиной можно представить в виде суммы двух упругих полей, первое из которых соответствует состоянию сплошного тела под действием нагрузок, а второе – телу с разрезом под действием симметричных нагрузок, приложенных только на поверхности разреза. Форма деформированной поверхности разреза определяется только вторым напряженным состоянием, т.к. нормальные смещения на месте разреза для первого напряженного состояния равны по условию симметрии нулю. Если в двумерной декартовой системе координат сечение поверхности разреза вдоль оси абсцисс принять расположенным в

положительной полуплоскости, то нормальные напряжения $\sigma_n(x)$, описывающие распределение сил сцепления и приложенные на линии разреза во втором напряженном состоянии, представляют собой разность напряжений, приложенных на поверхности разреза в суммарном поле напряжений $G'(x)$, и напряжений на месте разреза, соответствующих первому напряженному состоянию.

Для первого напряженного состояния не требуется каких-либо специальных преобразований, и поэтому оно легко определяется в рамках математической теории упругости [87]. Для второго состояния, вводя комплексную переменную $z = x + iy$, имеем [43,44]:

$$\sigma_{xx}^{(2)} + \sigma_{yy}^{(2)} = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right], \tag{1.11}$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)} = \varphi'(z) + \varphi'\left(\overline{z}\right) + \left(z - \overline{z}\right)\overline{\varphi''(z)}, \tag{1.12}$$

$$2\mu\left(u^{(2)} + iv^{(2)}\right) = (3 - 4\nu)\varphi(z) - \varphi\left(\overline{z}\right) + \left(z - \overline{z}\right)\overline{\varphi''(z)}. \tag{1.13}$$

Здесь

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int\left[\Delta U(x,y) + i\Delta\overline{U(x,y)}\right]dz, \tag{1.14}$$

где U – бигармоническая функция напряжений (функция Эйри). При этом

$$\Delta U = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right],$$

и для прямолинейного полубесконечного разреза

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \sigma_n(t)\frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}}dt,\ \varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{z}}\int_0^\infty \sigma_n(t)\frac{\sqrt{t}}{t - z}dt. \tag{1.15}$$

На разрезе ($x \ge 0$, $y = 0$) и его продолжении ($x \le 0$, $y = 0$) выполняются соотношения

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(2)} = 2\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right],\ \sigma_{xy}^{(2)} = 0,\ v^{(2)} = 4\left(1 - \nu^2\right)E^{-1}\,\mathrm{Im}\left[\varphi(z)\right]. \tag{1.16}$$

Далее можно вывести выражения для растягивающих нормальных напряжений вблизи конца разреза на его продолжении и нормальных смещений точек линии разреза вблизи его конца и затем прийти к характеристикам суммарного напряженного состояния вблизи контура произвольной поверхности нормального разрыва. Они имеют вид

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{s_1}} + G'(0) + O\left(\sqrt{s_1}\right), \tag{1.17}$$

$$v = \mp 4\left(1-\nu^2\right)E^{-1}K\sqrt{s_2} + O\left(s_2\sqrt{s_2}\right), \tag{1.18}$$

где s_1 – малое расстояние от рассматриваемой точки до вершины разреза, s_2 – малое расстояние от рассматриваемой точки линии разреза от его конца.

Согласно второй гипотезе КИН является единственной характеристикой сил сцепления, входящей в формулировку задач о трещинах при принятых предположениях. Он зависит от действующих нагрузок, конфигурации тела, поверхностей разрыва в нем, а также координат рассматриваемой точки. В зависимости от знака K возможны три варианта интерпретации напряженного состояния тела с трещиной:

1) если $K > 0$, то в рассматриваемой точке контура поверхности разрыва действует бесконечное растягивающее напряжение;

2) если $K < 0$, то действует бесконечное сжимающее напряжение;

3) если $K = 0$, то действующее вблизи контура растягивающее напряжение ограничено и при подходе к рассматриваемой точке напряжение стремится к приложенному на поверхности в этой точке контура нормальному напряжению.

Вариант №2 физически нереален, т.к. происходит смыкание берегов трещины и их пересечение. В 3-м имеет место непрерывность напряжений (1.17) на контуре и плавное смыкание противоположных берегов поверхности разрыва. Форма деформированной поверхности разрыва для каждого варианта представлены на Рис.1.1. Вариант №3 характеризует поведение равновесной трещины, для которой поперечные напряжения (1.17) и смещения (1.18) имеют вид

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{y}},\ v = \pm 4\left(1-\nu^2\right)E^{-1}K\sqrt{h(x)-y}, \tag{1.19}$$

а K соответствует КИН в точке B, $h(x)$ – профиль трещины.

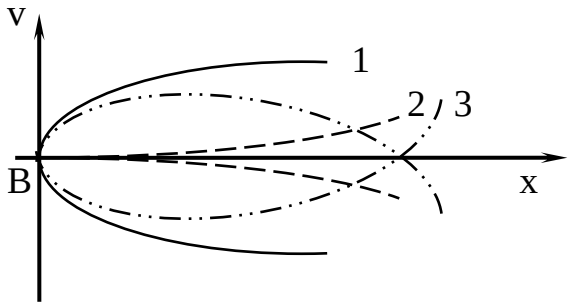


Рис.1.1 Форма деформированной поверхности разрыва

Равновесная трещина отличается от произвольной поверхности разрыва тем, что освободившая при образовании трещины энергия δW обращается нуль, т.е.

$$\delta W = \int_{\delta S} \sigma_{yy} |v| dS = 2\pi\left(1-\nu^2\right)E^{-1}K^2\delta S = 0, \qquad (1.20)$$

где δS – площадь новой поверхности трещины. Отсюда следует, что для равновесной трещины

$$K = 0. \qquad (1.21)$$

Это условие было получено С.А. Христиановичем [24] и позволяет при заданной системе действующих сил (распределенных, сосредоточенных) сформулировать задачу теории равновесных трещин.

В рамках плоской задачи упругости постановка задачи о раскрытии трещины формулируется следующим образом: для заданного расположения начальных трещин и данной системы сил, действующих на тело, требуется найти напряжения, деформации и координаты концов трещин, исходя из того, что удовлетворяются условия равновесия (одна из двух – (1.1)-(1.2) или (1.8)-(1.9), – систем уравнений), граничные условия и обеспечивается конечность напряжений и плавное смыкание противоположных берегов на краях трещины. Следует отметить, что уравнения (1.1)-(1.7) не определяют длину трещины. Поэтому при недостаточном количестве исходных данных, вытекающих из физических представлений о трещинах и процессах их развития, решение системы (1.1)-(1.7) может привести к неверным результатам, если с их помощью вычислять длину трещины. Поэтому для построения адекватной теории трещин хрупкого разрушения необходимо до-

полнить модель хрупкого тела учетом сил сцепления, действующих на ее поверхности.

Для неравновесной (развивающейся) трещины при повышении нагрузки силы сцепления в концевой области возрастают, обеспечивая конечность напряжения и плавность смыкания на краю трещины. Трещина начинает развиваться, начиная с момента достижения максимальной интенсивности, т.е. когда станет применима вторая гипотеза. Поэтому КИН примет вид

$$K = K_0 + K', \tag{1.22}$$

где первое слагаемое правой части соответствует действующим на тело нагрузкам и той же конфигурации трещин (без учета сил сцепления), а второе – той же конфигурации и одними только силам сцепления. В силу первой гипотезы

$$K' = -\pi^{-1}\int_0^\infty \frac{\sigma_n(t)}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{1.23}$$

Заметим, что верхний предел интеграла фактически является конечным, поскольку конечна область пространства, в которой действуют силы сцепления. Поэтому этот интеграл представляет собой константу κ (модуль сцепления). Далее, условие достижения максимальной интенсивности напряжений формулируется как

$$K_0 = \frac{\kappa}{\pi}, \tag{1.24}$$

откуда следует, что

$$\sigma_{yy} = \frac{\kappa}{\pi\sqrt{s_1}} + O(1). \tag{1.25}$$

Выполнение условия (1.24) или (1.25) для одного из концов трещины означает достижение трещиной состояния подвижного равновесия. В таком состоянии в случае неустойчивости подвижного равновесия условие (1.24) будет условием начала быстрого развития трещины. Силы сцепления, действующие в концевой области поверхности трещины вблизи точек, где интенсивность сил сцепления меньше максимально возможной, меньше сил сцепления, действующих в концевой области вблизи. Поэтому для таких точек выполняется неравенство

$$K_0 < \frac{\kappa}{\pi}. \qquad (1.26)$$

Таким образом, условия (1.24) и (1.26) позволяют при определении положений концов трещины вообще исключить из рассмотрения силы сцепления, ограничившись их суммарной интегральной характеристикой κ. Специальные оценки показывают, что влияние сил сцепления на поля напряжений и смещений берегов трещины существенно только в окрестности вершины трещины.

Итак, на основе вышеописанного линейные краевые задачи теории трещин ставятся следующим образом. В теле задаются положение и профиль трещины (системы трещин), а также граничные условия на ее берегах. Из решения задачи требуется определить форму трещины, найти поля напряжений и смещений берегов трещины. Предположение о медленном изменении нагрузок по сравнению со временем релаксации позволяет использовать статическую постановку задачи упругости. В том случае, когда решения задачи не существует, следует сделать вывод о том, что приложенная нагрузка превосходит разрушающую, поскольку при ее приложении наступает разрушение тела. Основные ограничения, связанные с этим подходом, обусловлены трудностями решения задачи в общем случае для криволинейных трещин. Поэтому для условий локально действующих нагрузок и криволинейного (несимметричного) профиля трещины применимы лишь численные методы.

1.2 Метод разрывных смещений

В настоящее время для описания процессов деформационного поведения структурно-неоднородных материалов широко используются методы конечных и граничных элементов [3,22,88-90,112,115,126]. В отличие от метода конечных элементов МГЭ позволяет снизить размерность задачи: плоские задачи теории упругости преобразуются к одномерным уравнениям для всех точек контура в двумерной области [35]. Одной из разновидностей МГЭ, адаптированной для решения краевых задач теории трещин, является МРС [31]. В рамках МРС исполь-

зуется аналитическое решение задачи о постоянном разрыве смещений на конечном разрезе упругой полуплоскости и ввиду линейности краевых задач считается, что движение трещины ничем не ограничивается [31]. Поэтому некоторые решения могут быть некорректными с точки зрения физики. Такие краевые задачи являются нелинейными и их необходимо решать путем пошаговых изменений нагрузки.

Граничные интегральные уравнения МРС, детально рассмотренные в [35], при переходе к конечным суммам образуют СЛАУ. В работе [104] рекомендуется решать СЛАУ двумя методами - методом исключения Гаусса и методом Гаусса-Зейделя. Метод Гаусса-Зейделя ограничивает число арифметических операций, за которое достигается конечное решение и подходит для разряженных матриц, поскольку операции осуществляются лишь с ненулевыми элементами [66]. Недостатком является плохая обусловленность СЛАУ, которая в некоторых случаях приводит к расходимости решения. Метод Гаусса не требует итераций и определяет обычно хорошо обусловленную СЛАУ. Недостатком является лишь то, что все операции производятся со всеми элементами матрицы. Таким образом, наилучшим методом решения СЛАУ при решении краевых задач теории трещин представляется метод Гаусса.

С учетом действия массовых сил согласно представлению [116,117] и (1.10) в декартовой системе координат тензор напряжений $\hat{\sigma}^g$, выражающий поправки на действие массовых сил, имеет компоненты

$$\sigma_{xx}^g = \frac{\nu}{1-\nu}\rho g_y \ell(x,y),\ \sigma_{yy}^g = \rho g_y \ell(x,y),\ \sigma_{xy}^g = \sigma_{yx}^g = 0, \tag{1.27}$$

где

$$\ell(x,y) = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} \tag{1.28}$$

- расстояние от самой удаленной точки $\left(x_0, y_0\right)$ трещины в направлении действия вектора $\mathbf{g}$ до точки $\left(x, y\right)$ на берегу трещины. Для трещины с профилем берега $y = f(x)$ угол между внутренней нормалью и вектором $\mathbf{g}$ записывается в виде

$$\cos(\theta) = \mathbf{g}\mathbf{n}_f\,,\ \mathbf{n}_f = -\left[1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]^{-1/2}\begin{pmatrix}-\frac{df}{dx} & 1\end{pmatrix}^T. \qquad (1.29)$$

В результате, для произвольной точки берега трещины имеем

$$\begin{pmatrix}\sigma_s^g\\ \sigma_n^g\end{pmatrix} = M\left[\theta(x,y)\right]\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\end{pmatrix}, \qquad (1.30)$$

где $M(\theta)$ - матрица поворота.

В рамках диссертации решение задач производится в условиях, когда трещина моделируется прямолинейным математическим разрезом конечной длины. В постановке с СКУ в общем случае часть берегов трещины находится под действием сдвиговых и нормальных смещений, а часть – под действием сдвиговых и нормальных напряжений. Поэтому для i-го граничного элемента ($i=\overline{1,J}$)

$$u_s^i = u_s^0,\ u_n^i = u_n^0,\ \sigma_s^i = \sigma_s^0,\ \sigma_n^i = \sigma_n^0. \qquad (1.31)$$

Образующие уравнения СЛАУ в первоначальном виде записываются в виде

$$u_s^i = \sum_{j=1}^{J} B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{J} B_{sn}^{ij} D_n^j\,, \qquad (1.32)$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^{J} A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{J} A_{sn}^{ij} D_n^j + \sigma_s^{gi}, \qquad (1.33)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^{J} B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{J} B_{nn}^{ij} D_n^j\,, \qquad (1.34)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^{J} A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^{J} A_{nn}^{ij} D_n^j + \sigma_n^{gi}, \qquad (1.35)$$

где $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}, A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$ - граничные коэффициенты влияния.

Учитывая тот факт, что для одного и того же граничного элемента может быть задано либо смещение либо напряжение, для i-го элемента дополнительно введем бинарную матрицу-столбец $\{\iota\}$, которая априори определяет задание для этого элемента смещение ($\iota_i = 1$) или напряжение ($\iota_i = 0$). Поскольку количество неизвестных в (1.32)-(1.35) равно $2J$, а число уравнений образует пары неизвест-

ных, то при сложении уравнений (1.32)-(1.35) получаем 2 уравнения с $2J$ неизвестными в каждом:

$$\iota_i\left(u_s^i+u_n^i\right)=\iota_i\left[\sum_{j=1}^{J}\left(B_{ss}^{ij}+B_{ns}^{ij}\right)D_s^j+\sum_{j=1}^{J}\left(B_{sn}^{ij}+B_{nn}^{ij}\right)D_n^j\right], \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}&\left(1-\iota_i\right)\left[\sigma_s^i-\sigma_s^{gi}+\sigma_n^i-\sigma_n^{gi}\right]=\\&=\left(1-\iota_i\right)\left[\sum_{j=1}^{J}\left(A_{ss}^{ij}+A_{ns}^{ij}\right)D_s^j+\sum_{j=1}^{J}\left(A_{sn}^{ij}+A_{nn}^{ij}\right)D_n^j\right].\end{aligned} \tag{1.37}$$

В результате сложения уравнений (1.36) и (1.37) формируется новая система уравнений с $2J$ неизвестными:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{J}\left[\iota_i\left(B_{ss}^{ij}+B_{ns}^{ij}\right)+\left(1-\iota_i\right)\left(A_{ss}^{ij}+A_{ns}^{ij}\right)\right]D_s^j+\\&+\sum_{j=1}^{J}\left[\iota_i\left(B_{sn}^{ij}+B_{nn}^{ij}\right)+\left(1-\iota_i\right)\left(A_{sn}^{ij}+A_{nn}^{ij}\right)\right]D_n^j=.\\&=\iota_i\left(u_s^i+u_n^i\right)+\left(1-\iota_i\right)\left[\sigma_s^i-\sigma_s^{gi}+\sigma_n^i-\sigma_n^{gi}\right]\end{aligned} \tag{1.38}$$

Поскольку в (1.38) в каждом i-м уравнении сложение приводит к уничтожению одной из размерностей искомой величины, регулируемое значением ι_i, то с физической точки зрения конфликта размерностей в системе (1.38) не возникает. Коэффициенты влияния имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}B_{ss}^{ij}&=2G\left\{-\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4-\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right\}-\\&-2G\overline{y}\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_6-\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_7\right]\end{aligned}, \tag{1.39}$$

$$B_{sn}^{ij}=2G\left\{-\overline{y}\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_6+\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_7\right]\right\}, \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}A_{ss}^{ij}&=-2(1-\nu)\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_2-\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_3\right]-\\&-\overline{y}\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4+\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right]\end{aligned}, \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}A_{sn}^{ij}&=(1-2\nu)\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_2+\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_3\right]-\\&-\overline{y}\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4+\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right]\end{aligned}, \tag{1.42}$$

$$B_{ns}^{ij} = 2G\left\{2\sin^2\left(\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4 + \sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right\} - \\ -2G\overline{y}\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_6 + \sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_7\right]\Big), \tag{1.43}$$

$$B_{nn}^{ij} = 2G\left\{-\overline{F}_5 + \overline{y}\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_6 - \cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_7\right]\right\}, \tag{1.44}$$

$$A_{ns}^{ij} = \overline{F}_2 - 2(1-\nu)\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_2 + \sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_3\right] - \\ -\overline{y}\left[\cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4 - \sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right], \tag{1.45}$$

$$A_{nn}^{ij} = \overline{F}_3 - (1-2\nu)\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_2 - \cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_3\right] + \\ +\overline{y}\left[\sin\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_4 + \cos\left(2\gamma_{ij}\right)\overline{F}_5\right] \tag{1.46}$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0,\ B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0,\ B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a_i}. \tag{1.47}$$

В (1.39)-(1.47) обозначено:

$$\gamma_{ij} = \gamma_i^{'} - \gamma_j^{'}$$

- наклон i-го элемента относительно j-го элемента (исходные углы $\gamma_i^{'}$ и $\gamma_j^{'}$ отсчитываются от оси абсцисс); a_i - половина длины i-го элемента. Кроме того

$$D_n = u_n(x,0_-) - u_n(x,0_+) \tag{1.48}$$

- нормальные раскрытия (разрывы) берегов трещины;

$$D_s = u_s(x,0_-) - u_s(x,0_+) \tag{1.49}$$

- касательные раскрытия (разрывы) берегов трещины;

$$u_n(x,0_-), u_n(x,0_+)$$

- нормальные смещения соответственно нижнего и верхнего берегов трещины;

$$u_s(x,0_-),\ u_s(x,0_+)$$

- касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины. При этом считается, что:

1) внутренняя нормаль к берегам трещины направлена внутрь трещины;

2) при $D_n > 0$ берега трещины сближаются;

3) при $D_s > 0$ наружный (верхний) берег смещается относительно внутреннего (нижнего) берега против часовой стрелки (влево).

На каждом из граничных элементов заданы смещения или напряжения, постоянные в пределах каждого элемента. Для узла граничного элемента с координатами (x_i, y_i) имеем:

$$\overline{F}_2 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\ln\sqrt{\left(\overline{x}-a_j\right)^2+\overline{y}^2} - \ln\sqrt{\left(\overline{x}+a_j\right)^2+\overline{y}^2}\right], \tag{1.50}$$

$$\overline{F}_3 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}-a_j}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}+a_j}\right)\right], \tag{1.51}$$

$$\overline{F}_4 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{\overline{y}}{\left(\overline{x}-a_j\right)^2+\overline{y}^2} - \frac{\overline{y}}{\left(\overline{x}+a_j\right)^2+\overline{y}^2}\right], \tag{1.52}$$

$$\overline{F}_5 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{\overline{x}-a_i}{\left(\overline{x}-a_j\right)^2+\overline{y}^2} - \frac{\overline{x}+a_i}{\left(\overline{x}+a_j\right)^2+\overline{y}^2}\right], \tag{1.53}$$

$$\overline{F}_6 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{\left(\overline{x}-a_j\right)^2-\overline{y}^2}{\left[\left(\overline{x}-a_j\right)^2+\overline{y}^2\right]^2} - \frac{\left(\overline{x}+a_j\right)^2-\overline{y}^2}{\left[\left(\overline{x}+a_j\right)^2+\overline{y}^2\right]^2}\right]; \tag{1.54}$$

$$\overline{F}_7 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\frac{2\overline{y}\left(\overline{x}-a_j\right)}{\left[\left(\overline{x}-a_j\right)^2+\overline{y}^2\right]^2} - \frac{2\overline{y}\left(\overline{x}+a_j\right)}{\left[\left(\overline{x}+a_j\right)^2+\overline{y}^2\right]^2}\right]; \tag{1.55}$$

$$\overline{x} = \left[x_i - x_j\right]\cos\left(\gamma_j^{'}\right) + \left[y_i - y_j\right]\sin\left(\gamma_j^{'}\right), \tag{1.56}$$

$$\overline{y} = -\left[x_i - x_j\right]\sin\left(\gamma_j^{'}\right) + \left[y_i - y_j\right]\cos\left(\gamma_j^{'}\right). \tag{1.57}$$

Заметим, что в случае разделения трещины на 2 части – основную и зияющую, – рассматривать решение для основной трещины для элементов $i \le J'$, где $J' < J$ - количество граничных элементов, на которые разбита основная трещина. Таким образом, решение системы (1.1)-(1.6), преобразованной в рамках МРС к виду (1.32)-(1.35), позволяет определить форму трещины и этапы развития трещины.

1.3 Применение решений краевых задач теории трещин к расчету коэффициентов интенсивности напряжений

Процесс разрушения складывается из двух стадий – зарождение трещины и ее развитие. Каждая из них имеет свои физические особенности. Поэтому критерии зарождения и развития трещин различаются. Последние используются только при наличии образованной трещины и являются дополнительными краевыми условиями при решении вопроса о предельном равновесии тела с трещиной или системой трещин [49]. Предельное состояние равновесия считается достигнутым, если трещиноподобный разрез получил возможность распространяться, и тогда разрез становится трещиной. Критерии начала распространения трещины могут быть получены на основе силовых и энергетических подходов.

С расчетом КИН связаны многие задачи горного дела, такие как устойчивость протяженных выработок, устойчивость бортов карьеров, отвалов, уступов, флюидо- и гидроразрыв пластов [7,24,26,34,47,94,99], добыча полезных ископаемых. Их знание необходимо для прогноза возможности распространения трещины, оценки последствий горных ударов и землетрясений.

Коэффициенты интенсивности напряжений характеризуют локальное поле напряжений около вершины трещины: квадрат величины КИН служит для получения оценок энергии [35], которая освобождается при единичном продвижении трещины в теле, забоя в шахте или сдвигового разрыва на геологическом нарушении в земной коре. Для многих частных задач они вычисляются и приводятся в справочниках [83], но охватить все возможные случаи, учитывающие конфигурацию тел, трещин и трещиноватость, не представляется возможным. По этой причине применение решений краевых задач теории трещин к расчету КИН связано с определенными трудностями. В этом контексте следует привести некоторые аналитические и численные методы вычисления КИН.

Различают три типа трещин: нормальный разрыв (Рис.1.2), поперечный сдвиг (Рис.1.3) и продольный сдвиг (Рис.1.4) (стрелками показаны направления действия усилий). Трещина нормального отрыва возникает, например, при рас-

клинивании материала, трещина поперечного сдвига – при снятии стружки, а продольного сдвига – при резании. Их комбинация позволяет описать напряженно-деформированное состояние у вершины трещины любой конфигурации [98].

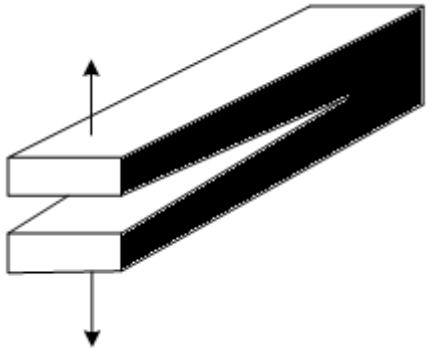


Рис.1.2 Трещина нормального разрыва

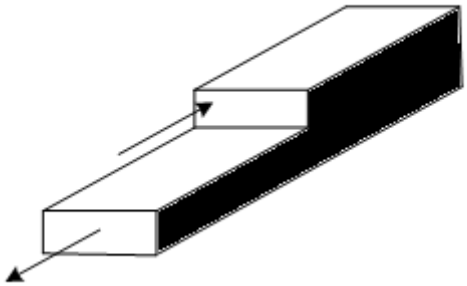


Рис.1.3 Трещина поперечного сдвига

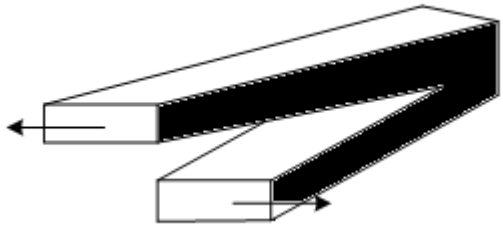


Рис1.4 Трещина продольного сдвига

1.3.1 Аналитические методы расчета коэффициентов интенсивности напряжений

Среди аналитических методов расчета КИН наибольшее практическое применение нашли асимптотический [39,97] и энергетический [33,40] методы. В зависимости от принадлежности различают КИН трех типов [41]:

K_I – одноосное растяжение плоскости со щелью,

K_{II} – плоский сдвиг,

K_{III} – антиплоский сдвиг.

В рамках асимптотического метода для трещин нормального разрыва (Рис.1.2) $K_I \neq 0$, $K_{II} = K_{III} = 0$; для трещин поперечного сдвига (Рис.1.3) $K_{II} \neq 0$, $K_I = K_{III} = 0$; для трещин продольного сдвига (Рис.1.4) $K_{III} \neq 0$, $K_I = K_{II} = 0$. В

полярных координатах (ξ,θ) с началом в вершине трещины, расположенной в отрицательной части оси абсцисс, поля напряжений и смещений вблизи вершины различаются в зависимости от типа трещины и ее упругого состояния. Для плоского деформированного состояния имеем [98]:

1) нормальный разрыв или отрыв

$$\sigma_x = \frac{-K_I}{\sqrt{2\pi\xi}}\cos(0.5\theta)\left[1+\sin(0.5\theta)\sin(1.5\theta)\right],\ \sigma_x\big|_{x>0,y=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}}; \tag{1.58}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}}\cos(0.5\theta)\left[1+\sin(0.5\theta)\sin(1.5\theta)\right],\ \sigma_y\big|_{x>0,y=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}}; \tag{1.59}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}}\sin(0.5\theta)\cos(0.5\theta)\cos(1.5\theta),\ \sigma_{xy}\big|_{x>0,y=0} = 0; \tag{1.60}$$

$$u = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{\xi}{2\pi}}\cos(0.5\theta)\left[1-2\nu+\sin^2(0.5\theta)\right],\ u\big|_{x<0,y=0} = 0; \tag{1.61}$$

$$v = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{\xi}{2\pi}}\sin(0.5\theta)\left[2(1-\nu)-\cos^2(0.5\theta)\right],\ v\big|_{x<0,y=0} = \frac{\sqrt{2\xi}(1-\nu)K_I}{\sqrt{\pi}G}; \tag{1.62}$$

2) поперечный сдвиг

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}}\sin(0.5\theta)\left[2+\cos(0.5\theta)\cos(1.5\theta)\right],\ \sigma_x\big|_{x>0,y=0} = 0; \tag{1.63}$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}}\sin(0.5\theta)\cos(0.5\theta)\cos(1.5\theta),\ \sigma_y\big|_{x>0,y=0} = 0; \tag{1.64}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}}\cos(0.5\theta)\left[1-\sin(0.5\theta)\sin(1.5\theta)\right],\ \sigma_{xy}\big|_{x>0,y=0} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\xi}}; \tag{1.65}$$

$$u = \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{\xi}{2\pi}}\sin(0.5\theta)\left[2(1-\nu)+\cos^2(0.5\theta)\right],\ u\big|_{x<0,y=0} = \frac{\sqrt{2\xi}(1-\nu)K_{II}}{\sqrt{\pi}G}; \tag{1.66}$$

$$v = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{\xi}{2\pi}}\cos(0.5\theta)\left[2\nu-1+\sin^2(0.5\theta)\right],\ v\big|_{x<0,y=0} = 0; \tag{1.67}$$

3) продольный сдвиг

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0,\ \mathbf{u} = 0. \tag{1.68}$$

В случае плоского напряженного состояния в (1.58)-(1.68) производится замена

$$\nu \to \frac{\nu}{1+\nu}.$$

Таким образом, определив напряжения и смещения у вершины трещины, можно найти на основе приведенных соотношений все КИН.

В рамках энергетического подхода вводится понятие критерия максимума потока энергии: трещина начнет распространяться в направлении максимума потока энергии в вершину трещины, когда величина этого потока достигнет критического значения. Для несимметричных трещин компоненты вектора потока энергии $\mathbf{I}$ связаны с КИН соотношениями

$$I_x = \frac{(1+\nu)(1+\chi)}{4E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right),\ I_y = -\frac{(1+\nu)(1+\chi)}{2E}K_I K_{II}, \tag{1.69}$$

где для плоского деформированного состояния

$$\chi = 3 - 4\nu,$$

плоского напряженного

$$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}.$$

Коэффициенты интенсивности напряжений можно определить и с помощью интеграла закрытия трещины. Согласно Дж. Ирвину [113], интенсивность освобождения упругой энергии G' можно определить по работе усилий $\sigma_y dx$ на поперечных смещениях, необходимой для того, чтобы превратить трещину длиной l в трещину длиной $(l - \Delta l)$:

$$G_I^{'} = \frac{1-\nu^2}{E}K_1^2 = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{1}{2\Delta l}\int_0^{\Delta l}\sigma_y v dx, \tag{1.70}$$

$$G_{II}^{'} = \frac{1-\nu^2}{E}K_{II}^2 = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{1}{2\Delta l}\int_0^{\Delta l}\sigma_{xy} u dx. \tag{1.71}$$

Недостатком энергетических методов является то, что для получения единственного решения системы (1.69) необходимо знать разность $(K_I - K_{II})$, что не позволяет ограничиваться поиском решения только для одного типа трещин, т.к. интенсивность освобождения энергии для трещин в общем случае определяется с помощью КИН 1-го, 2-го и 3-го родов [49]. Для плоской деформации имеем

$$G' = G_I' + G_{II}'. \tag{1.72}$$

Таким образом, трещина развивается в тех случаях, когда G' достигает критической величины

$$G' = G_c, \tag{1.73}$$

называемой удельной работой разрушения, а КИН – критической величины

$$K = K_c, \tag{1.74}$$

называемой критическим КИН (различается по типу согласно КИН), индивидуальным для каждого материала. Следует заметить, что (1.73) и (1.74) справедливы для идеального упругого разрушения, при котором у конца трещины

$$\sigma_{yy} \to \infty. \tag{1.75}$$

Критический КИН K_c определяют на эксперименте непосредственно или измеряют G_c, а затем вычисляют по формулам

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_{Ic}}{1-\nu^2}},\ K_c = \sqrt{EG_c} \tag{1.76}$$

соответственно для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Выбор формы, размеров и способа нагружения образца, а также условий эксперимента, гарантирующих достоверность результатов измерения G_c и G_{Ic}, устанавливаются государственными или отраслевыми стандартами.

1.3.2 Численные методы расчета коэффициентов интенсивности напряжений

Среди численных методов расчета КИН [32,49] кратко рассмотрим метод расчета по коэффициенту концентрации напряжений, решения частной задачи теории упругости, по методу сечений, с помощью аналитических формул, полученным в работах Линькова, а также с применением МРС (см.§1.2.3).

Расчет КИН по коэффициенту концентрации напряжений осуществляется на основе соотношения

$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \sigma_{ном}, \tag{1.77}$$

где α_σ – коэффициент концентрации напряжений, σ_{max} – наибольшее местное напряжение, $\sigma_{ном}$ – номинальное напряжение (без учета концентрации). Для трещины нормального отрыва имеем

$$K_I = \lim_{\xi \to 0} \frac{\sqrt{\pi\xi}}{2} \max\left(\sigma_y\right) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\sqrt{\pi\xi}}{2} \alpha_\sigma \sigma_{ном}. \tag{1.78}$$

При расчете КИН с помощью решения частной задачи используется следующая постановка [52]. Геометрическая модель - плоскость с одной трещиной в области определения $|x| \le l,\ y = 0$. На противоположных берегах трещины задаются равные и противоположно направленные силы величины $dP_y = \sigma_y dx$, $dP_x = \tau_{xy} dx$. Для трещины нормального отрыва

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sigma_y \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx, \tag{1.79}$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} \sigma_{xy} \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx. \tag{1.80}$$

Следует отметить, что в (1.78) и (1.79) КИН не зависит от упругих постоянных материала, когда нагрузки самоуравновешены на поверхности трещины.

В случае расчета КИН с помощью метода сечений рассматривается плоское тело, содержащее трещину и нагруженное в своей плоскости. Далее выделяется воображаемым сечением часть тела таким образом, чтобы это сечение проходило через конец трещины. Дополнительное усилие, возникающее у конца трещины в результате концентрации напряжений, равно $\int_0^{\xi'} \sigma' d\xi$, где верхний предел определяется из условия, что напряжение σ' при $\xi = \xi'$ равно номинальному напряжению $\sigma_{ном}$:

$$\sigma' = \sigma_{ном} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi'}}. \tag{1.81}$$

Из записи условий равновесия внешних и внутренних сил, которые действовали на ту часть тела, через которую не проходило сечение, следовало, что усилие, не

передающееся через линию трещины, компенсируется усилием от концентрации напряжений у вершины трещины. В результате, условие равновесия имело вид

$$2\sigma l - 2\int_0^{\xi'} \sigma' d\xi = 0. \qquad (1.82)$$

Подставляя (1.81) в (1.82), получаем

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}. \qquad (1.83)$$

Точность оценки КИН повышается, если при аппроксимации неизвестных разрывов смещений использовать асимптотические представления. В этом случае пределы оказываются пропорциональными коэффициентам аппроксимации, что делает удобным применение МРС. Такой подход представлен в работе [35]. Аналитические формулы, позволяющие вычислять КИН 1-го и 2-го рода, в явном виде содержат нормальные (D_n) и сдвиговые (D_s) разрывы смещений берегов трещины длиной L с вершиной в $x = L$:

$$K_I = -\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \to L} \frac{D_n}{\sqrt{L-x}}, \qquad (1.84)$$

$$K_{II} = -\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \to L} \frac{D_s}{\sqrt{L-x}}, \qquad (1.85)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (1.86)$$

1.4 Анализ избранных моделей разрушения материалов

Во введении были приведены некоторые из существующих моделей разрушения материалов. Рассмотрим некоторые из них подробнее.

В работах [96,110,111] приводятся модели нормальной и сдвиговой деформации Р. Гудмана. В рамках модели сдвиговой деформации под действием сжимающей нормальной нагрузки происходит перемещение в направлении, параллельном нарушению сплошности. В модели нормальной деформации при приложении к образцу с трещиной нормальной сжимающей нагрузки происходит перемещение в направлении, нормальном к нарушению сплошности. Зависимость

между напряжением и раскрытием зияющей трещины (Рис.1.5) определяется с помощью смещения при нормальной деформации как

$$\frac{\sigma_n - P}{P} = A\left(\frac{\Delta_n}{v_{mc} - \Delta_n}\right)^t, \tag{1.87}$$

где P – давление, определяющее начальные условия измерения смещения, v_{mc} – максимально возможное закрытие трещины (показано вертикальной стрелкой), A, t – безразмерные эмпирические коэффициенты.

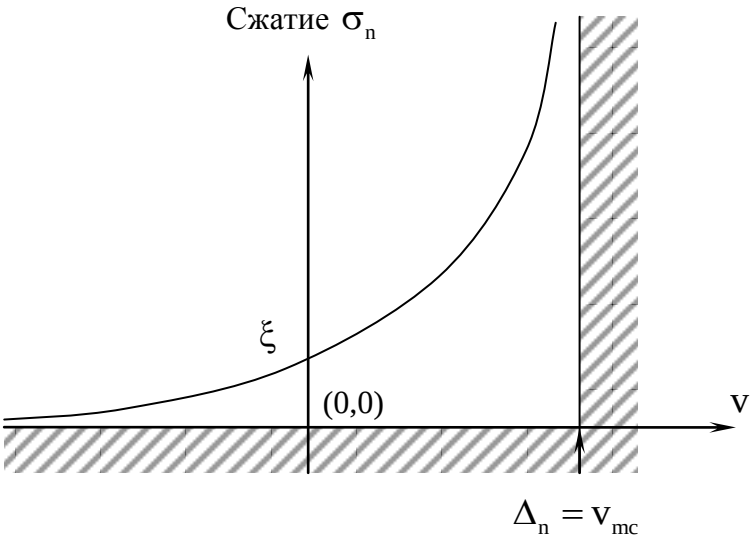


Рис. 1.5 Модель нормальной деформации

В работах [20,46,88] приведена дилатансионная модель. При сдвиге может происходить смещение материала в направлении, перпендикулярном трещине, в пределах, зависящих от геометрии и граничных условий скального массива.

В работах [20,88,97,120] рассматривается модель пилообразной трещины (Рис.1.6). В случае сжатия и сдвига при малых нормальных напряжениях берега волнообразной трещины подвергаются нормальному разрыву (Рис.1.7) величиной

$$\tau_p = \sigma_n \mathrm{tg}(\varphi + i), \tag{1.88}$$

а при больших – сдвигу (Рис.1.8) величиной

$$\tau_p = \tau_0 + \sigma_n \mathrm{tg}(\varphi), \tag{1.89}$$

что позволяет объяснить, например, процессы разрушения и разрыхления пород в районе сдвижек. Эта модель ограничивает сферу действия дилатансии малой зо-

ной растяжения и избавляет ее от аномально высоких касательных напряжений в больших объемах горной породы.

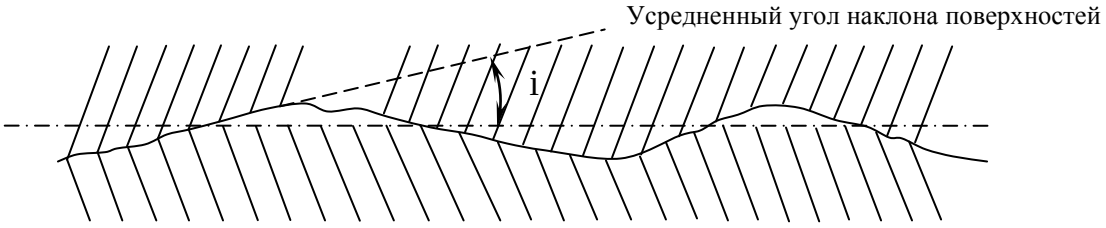


Рис.1.6 Усредненное положение трещины (план) в модели пилообразной трещины

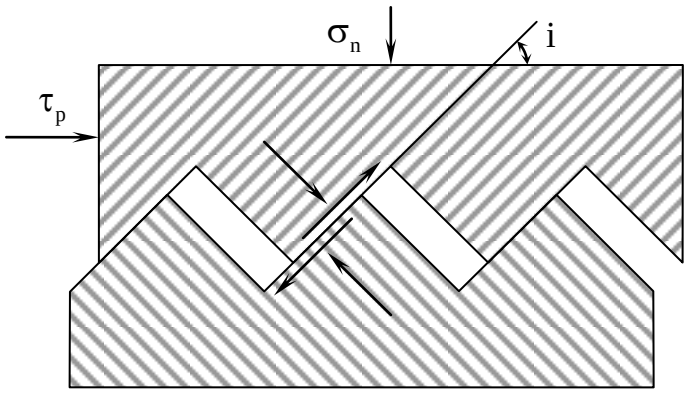


Рис.1.7 Сдвиг и сжатие при малых нормальных напряжениях

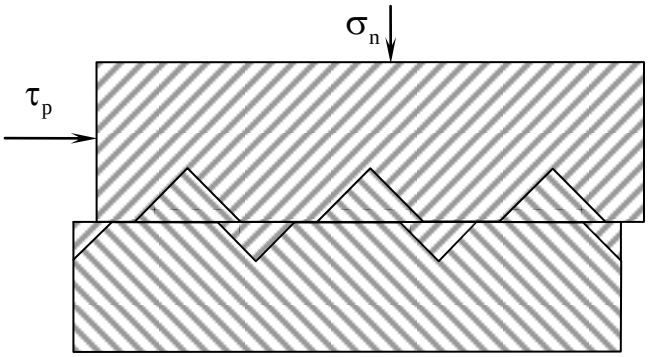


Рис.1.8 Сдвиг при больших нормальных напряжениях

В работе Ю.А. Кашникова, Е.М. Якушина и С.Г. Ашихмина [28] рассмотрена вязкопластическая модель, которая описывает процесс образования трещин в скальном массиве. В трещиноватой среде напряжения и смещения (1.31) зависят от времени. Поэтому скорости вязкопластических смещений определялись по формуле

$$\dot{u}_n = \left\{0,\ K_s \le 0;\ \frac{K_s}{\eta}\frac{\partial Q_s}{\partial \sigma_n}\right\},\ \dot{u}_s = \left\{0,\ K_s \le 0;\ \frac{K_s}{\eta}\frac{\partial Q_s}{\partial \sigma_s}\right\}. \qquad (1.90)$$

где K_s - критерий разрушения в плоскости слоистости, η - вязкость материала, заполняющего поверхность раздела, Q_s - пластический потенциал, соответствующий K_s. Смещения определяются из выражений

$$u_n = \int_0^t \dot{u}_n\left[\sigma_n(t)\right]dt\,,\ u_s = \int_0^t \dot{u}_s\left[\sigma_s(t)\right]dt\,. \qquad (1.91)$$

В работах [109,114], выполненных Лейхнитцем и Ербаном, приводятся экспериментальные результаты на срезе по поверхностям трещин. Установлен характер зависимости нормальных и касательных смещений, возникающих при сдвиге по поверхности протяженных трещин от нормальных и касательных напряжений (Рис.1.9). В интервале $0 \le u_s \le u_p$ касательные напряжения равны

$$\sigma_r = \sigma_p\left[2\frac{u_s}{u_p} - \left(\frac{u_s}{u_p}\right)^2\right]. \qquad (1.92)$$

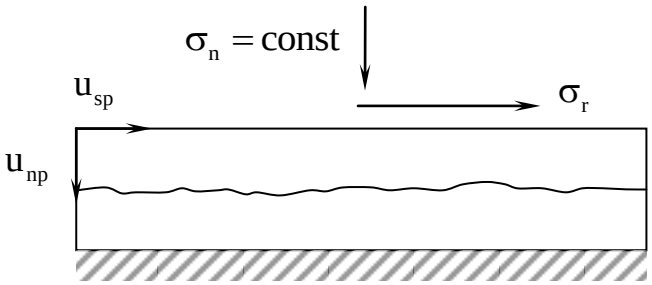


Рис.1.9 Напряжения и смещения при сдвиге по поверхности протяженной трещины

В работе С.С. Стоянова [84] приведены модели Е.Андерсона, М.Чиннэри и Т.Маруяма. Е. Андерсон впервые применил аналитический метод исследования напряжений около отверстий к структурно-тектоническим задачам. Им было описано в [103] изменение напряженного состояния вокруг разрыва в условиях чистого сдвига и показано, что в пространстве, окружающем разрыв, имеет место снижение концентрации напряжений, т.к. очень высокая концентрация напряжений наблюдается вблизи вершины трещины. С помощью его результатов объясняются механизмы образования косых разломов, ответвляющихся от главного. Многосторонний анализ проблемы перераспределения напряжений вокруг разрывов с рассмотрением вопроса не только с физической, но и с геологической точек зрения, принадлежит М. Чиннэри [105-107]. Формально его модели относятся к

сдвиговым разрывам, но общая методика, как и выводы, применимы к сколовым нарушениям любого типа. Разрыв представлен как дислокационная поверхность разнообразной формы, в том числе и в случае бесконечной длины. Разнообразные задачи распределения напряжений около разрывов в плоской постановке решены в аналитической разработке Т. Маруяма [118]. Разрыв описывается дислокационной поверхностью, на которой задается скачок смещений (постоянный или изменяющийся вдоль нее по выбранному закону), и рассчитываются возникающие около разрыва напряжения.

Анализ вышеприведенных моделей показал, что в них рассматриваются только случаи, когда к берегам основной трещины приложены напряжения и устанавливается связь между напряжениями и раскрытием зияющей трещины. Поэтому для объективной оценки механизма формирования трещины разрыва при сжатии и сдвиге возникает необходимость в установлении связи раскрытий берегов трещины с КИН.

1.5 Формирование трещиноватости в геоматериалах

Поведение скального массива как геомеханической среды зависит от его естественного напряженного состояния, которое обусловливается гравитацией, тектоникой, эрозией и зависит от масштабного фактора [37]. При решении проблем инженерной геомеханики в условиях трещиноватости геоматериалов фундамента для сравнительно легких инженерных сооружений скальное основание зонально-блочного строения зачастую может рассматриваться как квазиоднородное линейно-деформируемое или упругопластичное полупространство (либо слой на полупространстве) с заданными (по материалам изысканий) интегральными расчетными характеристиками. Для крупных инженерных сооружений с большими напряжениями в основании тот же массив следует рассматривать как неоднородную, зонально-блочную среду с разными типами связи блоков [20].

Трещиноватость образуется на основе системы трещин - совокупности генетически однородных трещин, свойственная какой-либо тектонической структуре

или определенной ее части и обладающая одинаковыми или близкими элементами залегания. Трещины относят к одной системе, если они имеют азимуты и углы падения, отклоняющиеся от среднего значения не более чем на 10°.

Выделяют несколько этапов истории каждой из образующих массив породы. Среди них наиболее важен в рамках диссертации этап разгрузки естественных напряжений, выветривания и денудации. Трещиноватость развивается во времени, подчиняясь следующим закономерностям:

1) образование и развитие почти всех типов трещин происходит в условиях переменных по интенсивности и направлению тектонических напряжений, повторяющихся во времени;

2) ориентация трещин последующей генерации в значительной степени наследует и использует ориентацию предыдущих генераций;

3) ориентация серий параллельных друг другу плоскостей тектонических разрывных смещений и трещин разных порядков имеет системный характер;

4) ориентация серий тектонических разрывных смещений и мелких трещин в пространстве совпадает или очень близка друг к другу;

5) каждая трещина нарушает сплошность скальной породы и представляет собой зону относительного ослабления, способствующую изменению ее напряженного состояния и проявлению процессов выветривания.

Распределение трещин в объеме скального массива порождает систему трещин, которая часто интерпретируется как хаотическая трещинная сеть. Она образуется в локальном объеме горной породы под действием разновозрастных полей напряжений [69]. В общем случае небольшие объемы земной коры, находящиеся в условиях трехосного сжатия, разрушаются под действием тектонических сил с образованием вначале двух сопряженных систем трещин. Резкое (при существенно упругом поведении массива) падение напряжений после их возникновения вызывает при новой индексации осей напряжений формирование в локальном объеме отрывной системы трещин. Процесс продолжается в виде циклов, когда накапливающиеся в разломной зоне напряжения частично снимаются за счет подвижек по сети уже возникших трещин.

Таблица 1.1

Характер нарушения сплошности массива	Мощность зоны дробления разлома или ширина трещин	Протяженность нарушения
Разломы I порядка – глубинные, сейсмогенные	Сотни и тысячи метров	Сотни и тысячи километров
Разломы II порядка – глубинные, частично сейсмогенные	Десятки и сотни метров	Десятки и сотни километров
Разломы III порядка	Метры и десятки метров	Километры и десятки километров
Разломы IV порядка	Десятки и сотни сантиметров	Сотни и тысячи метров
Крупные трещины V порядка	>20 м	>10 м
Средние трещины VI порядка	10-20 мм	1-10 м
Мелкие трещины VII порядка	2-10 мм	<1 м
Тонкие трещины VIII порядка	1-2 мм	<1 м
Локальные трещины IX порядка – внутри пластов, слоев, породных блоков	<1 мм	<1 м

Каждая из трещин, отнесенная к какому-либо типу нарушению сплошности массива (см. Таблицу 1), способна образоваться по одинаковому сценарию [45]. В первом случае в сплошной среде имеется нарушение в виде ограниченной плоской трещины. На берега трещины действуют нормальные к плоскости трещины, постоянные во времени растягивающие напряжения, в результате чего происходит дальнейший рост трещины. Во втором случае первоначальное нарушение сплошности среды представляет собой плоскую трещину, осложненную «малоамплитудными прямоугольными ступеньками», препятствующими проскальзыванию берегов трещины под действием первоначально приложенных к ним касательных напряжений. Проскальзывание происходит в результате приложения некоторого нормального к плоскости трещины растягивающего напряжения. Такого типа трещины относятся к типу «пилообразных». При достаточно малых размерах ступенек по сравнению с продольными размерами трещины второй тип трещин может трансформироваться в первый, а при увеличении размера ступенек первый тип может трансформироваться во второй.

Существуют различные мнения относительно развития практической направленности теории трещин в геомеханики. При этом авторы обращают внимание как на макро-, так и на меньшие масштабы образования и развития трещин в геоматериалах. В больших пространственных масштабах процесс сдвижения массива при сжатии и сдвиге описывается в работе [85]. Автор утверждает о необходимости постоянного контроля сдвижение земной поверхности для обеспечения безопасной работы газо- и нефтепроводов, железных дорог и др. В работе [92] предлагается все дальнейшие исследования по изучению устойчивости бортов карьеров, откосов уступов и отвалов направлять на изучение критических величин смещений для различных инженерно-геологических комплексов горных пород. В работах [95,96] автор предлагает учитывать поведение оползней, поскольку они являются одним из основных видов нарушения устойчивости грунтовых массивов: оползневые подвижки грунта на склонах и откосах развиваются в результате активных сдвигающих сил, которые происходят в различного рода откосах при увеличении действующих на массив нагрузок.

Таким образом, при решении задач теории трещин требуется учитывать не только развитие самой трещины, но и развитие трещин в ее окружении. Поэтому оценка трещиноватости массива в геоматериалах является важным этапом в оценке надежности и долговечности инженерных сооружений и конструкций, фундаментом которых является трещиноватый массив.

1.6 Выводы к первой главе

Рассмотрены линейные краевые задачи теории трещин с однородными ГУ. Приведена постановка задачи со смешанными ГУ в общем виде. Показано применение метод разрывных смещений для решения задач теории трещин. Введено понятие КИН и дана его математическая формулировка для различного типа трещин. Рассмотрены аналитические и численные методы расчета КИН 1-го и 2-го рода. Представлен анализ некоторых моделей трещин. Рассмотрено влияние трещин на разрушаемость горных пород на основе понятия трещиноватости.

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗРЫВОВ СМЕЩЕНИЙ БЕРЕГОВ ТРЕЩИН

2.1 Типизация плоских краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями

Для всех задач Главы 2 в рамках ВЭ ставится и решается краевая задача теории трещин в постановке (1.1)-(1.7), приведенной к СЛАУ (см. §1.2).

Для упрощения дальнейших рассуждений в соответствии с (1.31) запишем вектора правой части граничных условий

$$\mathbf{u}_0 = \left(u_n^0 \quad u_s^0\right)^T, \ \boldsymbol{\sigma}_0 = \left(\sigma_n^0 \quad \sigma_s^0\right)^T; \tag{2.1}$$

вектора левой части на берегах основной ($b = OA$) и зияющей ($L = OB$) частей трещины [58]

$$\mathbf{u}_i = \left(u_n^i \quad u_s^i\right)^T, \ \boldsymbol{\sigma}_i = \left(\sigma_n^i \quad \sigma_s^i\right)^T. \tag{2.2}$$

Общее представление геометрической модели трещины и постановки граничных условий задают Рис.2.1а и Рис.2.1б.

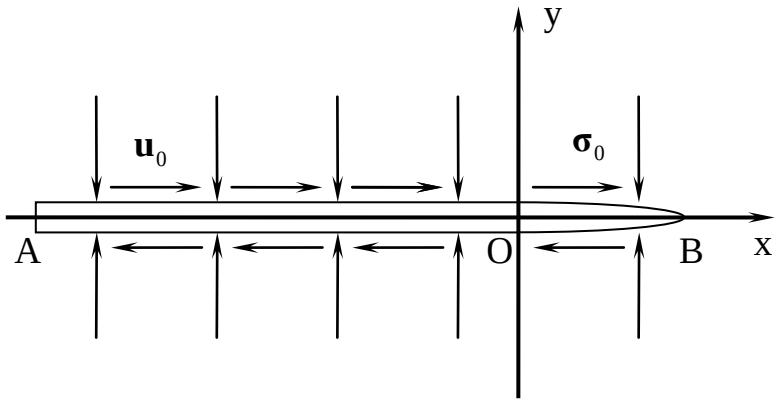


Рис.2.1а Геометрическая модель трещины смешанного типа: общий случай №1 (субкомбинация 15а, табл.2.1)

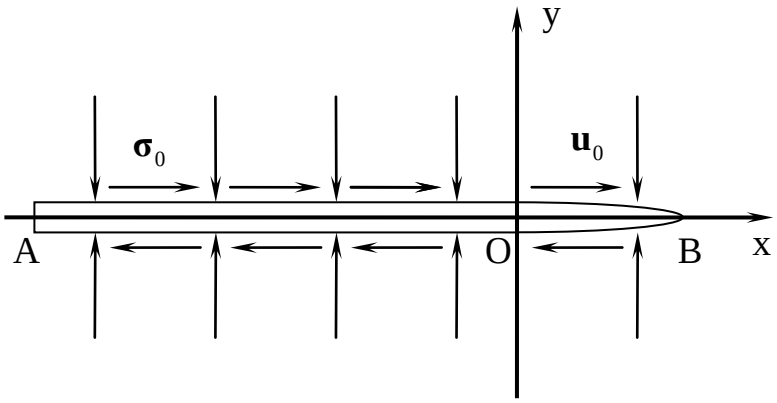


Рис.2.1б Геометрическая модель трещины смешанного типа: общий случай №2 (субкомбинация 15б, табл.2.1)

Из комбинаторных свойств перестановок (2.1) и (2.2) в граничных условиях образуется конечное множество сценариев развития трещины. Неповторяющиеся комбинации по векторам (2.1) приведены в таблице 2.1, где указаны только нетривиальные компоненты. По таблице трещины отрыва и трещины сдвига являются частными случаями трещины смешанного типа.

Таблица 2.1

Порядковые номера комбинаций нетривиальных граничных условий

Порядковый номер комбинации	Нетривиальные компоненты	Части трещины по субкомбинациям			Источник
		вариант	АО	ОВ	
1	u_n^0	а	u_n^0		
		б		u_n^0	
		в	u_n^0		
2	σ_n^0	а	σ_n^0		
		б		σ_n^0	
		в	σ_n^0		
3	u_n^0, σ_n^0	а	u_n^0	σ_n^0	[54],[59]
		б	σ_n^0	u_n^0	
4	u_s^0	а	u_s^0		
		б		u_s^0	
		в	u_s^0		
5	σ_s^0	а	σ_s^0		
		б		σ_s^0	
		в	σ_s^0		

6	u_s^0, σ_s^0	а	u_s^0	σ_s^0	[54],[59]
		б	σ_s^0	u_s^0	
7	$u_n^0,\ u_s^0$	а	u_n^0	u_s^0	
		б	u_s^0	u_n^0	
		в	u_n^0, u_s^0	u_n^0	
		г		u_s^0	
		д			[54],[58], [75]
		е	u_n^0	u_n^0, u_s^0	
		ж	u_s^0		
		з			
		и	u_n^0, u_s^0		
8	$\sigma_n^0,\ \sigma_s^0$	а	σ_n^0	σ_s^0	
		б	σ_s^0	σ_n^0	
		в	σ_n^0, σ_s^0	σ_n^0	
		г		σ_s^0	
		д			
		е	σ_n^0	σ_n^0, σ_s^0	
		ж	σ_s^0		
		з			
		и	σ_n^0, σ_s^0		
9	$u_n^0,\ \sigma_s^0$	а	u_n^0	σ_s^0	
		б	σ_s^0	u_n^0	
10	u_s^0, σ_n^0	а	u_s^0	σ_n^0	
		б	σ_n^0	u_s^0	
11	$u_n^0,\ \sigma_n^0,\ \sigma_s^0$	а	u_n^0	σ_n^0, σ_s^0	
		б	σ_n^0, σ_s^0	u_n^0	
12	$u_s^0,\ \sigma_n^0,\ \sigma_s^0$	а	u_s^0	σ_n^0, σ_s^0	
		б	σ_n^0, σ_s^0	u_s^0	
13	$u_n^0,\ u_s^0,\ \sigma_n^0$	а	σ_n^0	u_n^0, u_s^0	
		б	u_n^0, u_s^0	σ_n^0	[54]
14	$u_n^0,\ u_s^0,\ \sigma_s^0$	а	σ_s^0	u_n^0, u_s^0	
		б	u_n^0, u_s^0	σ_s^0	[54],[73]
15	$u_n^0,\ u_s^0,\ \sigma_n^0,\ \sigma_s^0$	а	u_n^0, u_s^0	σ_n^0, σ_s^0	[53],[76]
		б	σ_n^0, σ_s^0	u_n^0, u_s^0	

Приведем некоторые примеры комбинаций, встречающиеся в природе и технике. Так, например, состояние $u_n^0 \neq 0$ характеризует расклинивание трещины попавшими в нее обломками породы, состояние $\sigma_n^0 \neq 0$ - гидростатическое давление жидкости на берега трещины, состояние $u_s^0 \neq 0$ - сдавленное (растянутое) вдоль берегов упругое состояние трещины, а $\sigma_s^0 \neq 0$ - воздействие движущейся жидкости, газа или твердого тела вдоль берегов трещины, вызванное внешними или массовыми силами. Учитывая также тот факт, что в практических и инженерных целях гораздо важнее дать экспертной оценку скорости развития трещины (смещения ее берегов), чем получить точное решение задачи в указанной постановке, для оценки точности экспертных оценок необходимо знать их расхождение с точным решением. Ниже рассматриваются аспекты теории трещин, связанные с анализом идентичности аналитических и численных решений краевых задач теории трещин.

2.2 Алгоритм решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями и расчета коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода

На Рис.2.2 представлена модель трещины в трещиноватом массиве, для которой постановка задачи характеризуется субкомбинацией 7д.

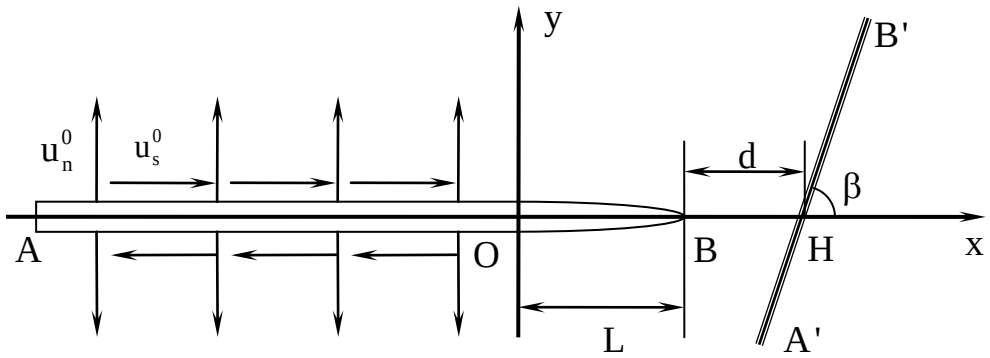


Рис.2.2 Геометрическая модель трещины в трещиноватом массиве

Для каждого типа трещин ниже представлен единый алгоритм решения краевых задач теории трещин, который можно записать следующим образом.

1. Формирование таблицы физических свойств горной породы и геометрической модели трещины в виде математического разреза плоскости.

2. Формирование системы граничных условий в рамках теории МГЭ.

3. Формирование замкнутой СЛАУ и приведение ее к матричному виду.

4. Решение СЛАУ.

5. Представление решения СЛАУ в виде таблицы нормальных и сдвиговых раскрытий по номерам граничных элементов.

6. Построение функционала, интерполирующего нормальное и сдвиговое раскрытия трещины

$$\mathbf{D}(x) = \left[D_n(x) \quad D_s(x)\right]^T, \; x \in [-b, L]. \tag{2.3}$$

7. Аппроксимация раскрытий в зияющей части трещины

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) p_n \sum_{i=0}^{M} \alpha_{in} \left(u_s^0 / u_n^0\right)^i + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^{M} \beta_{in} \left(\sigma_s^0 / \sigma_n^0\right)^i, \tag{2.4}$$

$$D_s(x) = D_n^{(1)}(x) p_s \sum_{i=0}^{M} \alpha_{is} \left(u_n^0 / u_s^0\right)^{i-1} + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^{M} \beta_{in} \left(\sigma_n^0 / \sigma_s^0\right)^{i-1}, \tag{2.5}$$

где

$$p_n = \left[\gamma_{0n} + \gamma_{1n} \exp\left(\gamma_{2n} b L^{-1}\right)\right]\left[\eta_{0n} + \eta_{1n} \exp\left(\eta_{2n} b L^{-1}\right)\right], \tag{2.6}$$

$$p_s = \left[\gamma_{0s} + \gamma_{1s} \exp\left(\gamma_{2s} b L^{-1}\right)\right]\left[\eta_{0s} + \eta_{1s} \exp\left(\eta_{2s} b L^{-1}\right)\right], \tag{2.7}$$

а смещение $D_n^{(\sigma)}$ учитывает поправку на действие напряжений σ_n^0. Явный вид функций $D_n^{(1)}(x)$ и $D_n^{(\sigma)}$ представлен в §3.1 (см. формулы (3.1) и (3.8)).

8. Вычисление КИН 1-го и 2-го рода в виде пределов (формулы из работ Линькова (1.84) и (1.85)).

Для трещин отрыва $p_n, p_s = 1$, $D_n^{(\sigma)} = 0$, а постоянные коэффициенты α_{in} и α_{is}, находятся методом наименьших квадратов.

Для трещин сдвига $D_n^{(\sigma)} = 0$, и с помощью метода наименьших квадратов находятся коэффициенты α_{in}, α_{is}, а затем постоянные γ_{in}, γ_{is}, η_{in} и η_{is} для зияющей части трещины.

Для смешанного типа трещин и трещин в трещиноватом массиве проводятся последовательно действия для трещин отрыва и сдвига, а затем находятся для зияющей части трещины коэффициенты β_{in} и β_{is}.

2.3 Программный комплекс расчета раскрытий трещины

В качестве среды разработки программного комплекса, предназначенного для проведения ВЭ по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины, была выбрана *Borland Delphi 6.0.* Требования к операционной системе *Windows 98/Me/2000/XP*. Листинг фрагментов программного комплекса [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] приведен в приложении 2.

На основе вычислительного алгоритма, изложенного в §2.2, были созданы программы, получившие названия *MDCM* 1.0, *QualAn* 1.0, предназначенные для проведения численных расчетов по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины, количественного и анализа идентичности распределения этих раскрытий [79,80].

Программный комплекс состоит из программных модулей, которые выполняют расчеты и отвечают за визуализацию решений. Моделирование в рамках разработанного комплекса возможно только специалистами в области математического моделирования разрушения геоматериалов, так как подразумевает осмысленное введения всех входных данных.

Состав программы *MDCM* 1.0:

- модуль *Variables* объявляет глобальные переменные;

- модуль *Input* осуществляет считывание и проверку корректности ввода входных данных, формирует рисунок;

- модуль *Input_Function* позволяет задать функцию нормальных смещений берегов основной трещины;

- модуль *Main* производит разбивку трещины на граничные элементы, формирует и решает СЛАУ, на выходе передает данные в модуль *Output*;

- модуль *Formulas* содержит вспомогательные процедуры для формирования и решения СЛАУ;

- модуль *Error* выдает ошибку пользователя на экран;

- модуль *Input_Crack* осуществляет считывание параметров нарушения материала;

- модуль *Input_Approx* осуществляет считывание параметров аппроксимирующей функции, а затем передает эти параметры в модуль *Output* для вывода результатов;

- модуль *Output* осуществляет вывод результатов моделирования на экран (таблиц, графиков, кривых интерполяции и аппроксимации), позволяет сохранять результаты в файл.

Графический интерфейс пользователя подразумевает тип экранного представления, при котором пользователь может выбирать команды, запускать задачи, просматривать списки файлов, указывая на элементы диалоговых окон.

Интерфейс пользователя включает диалоговые окна различного дизайна, обратную связь с пользователем, объединяет все элементы и компоненты программы, которые способны оказывать влияние на взаимодействие пользователя с программным обеспечением.

Основным элементом любого приложения, написанного на *Delphi*, имеющего интерфейс пользователя является диалоговое окно (форма).

После запуска программы на экране компьютера возникает основное диалоговое окно, которое содержит две вкладки “**Постановка задачи**” (рис.2.3) и “**Справочные материалы**” (рис.2.4).

С помощью вкладки “**Постановка задачи**” производится ввод необходимых для проведения расчета данных, при этом формируется схема, моделирующая развитие трещины для поставленной задачи. Пользователь задает длины основной и зияющей частей трещин и может дискретизировать их границу. При наведении курсора на любой элемент формы на экране появляется подсказка.

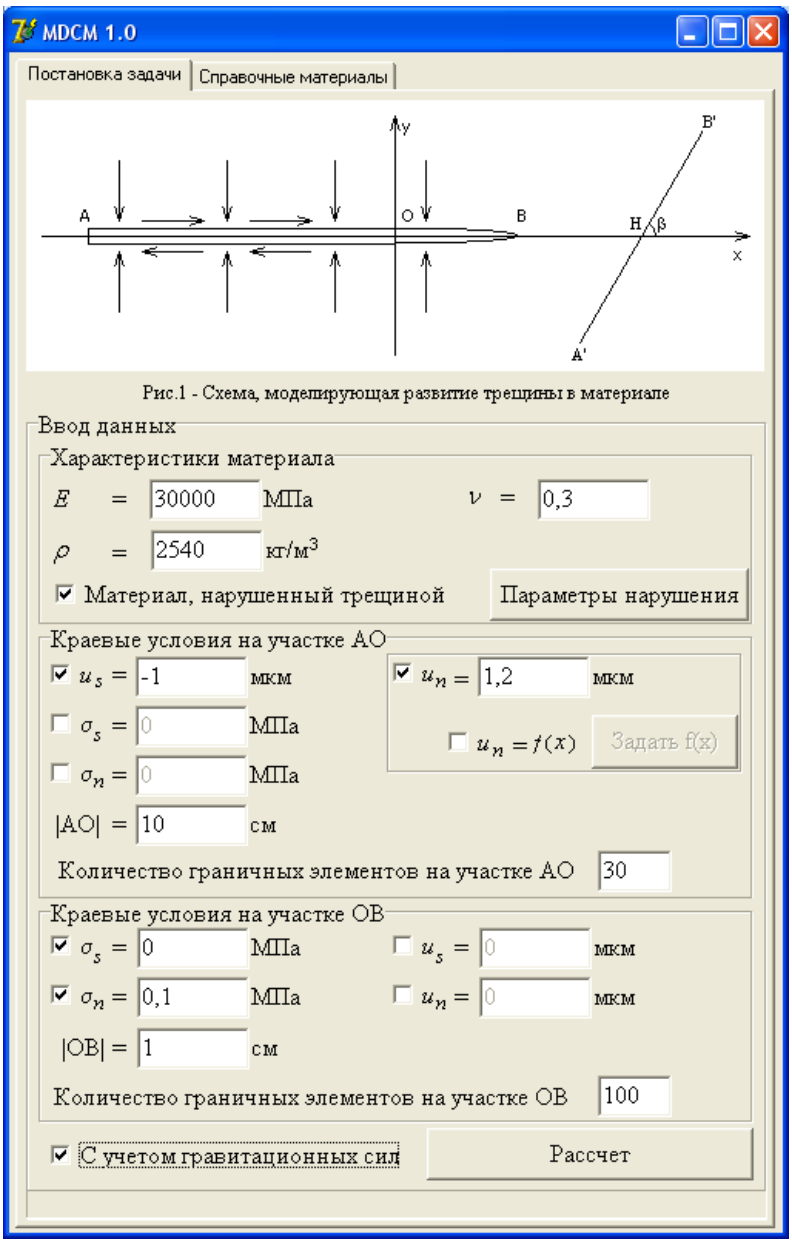
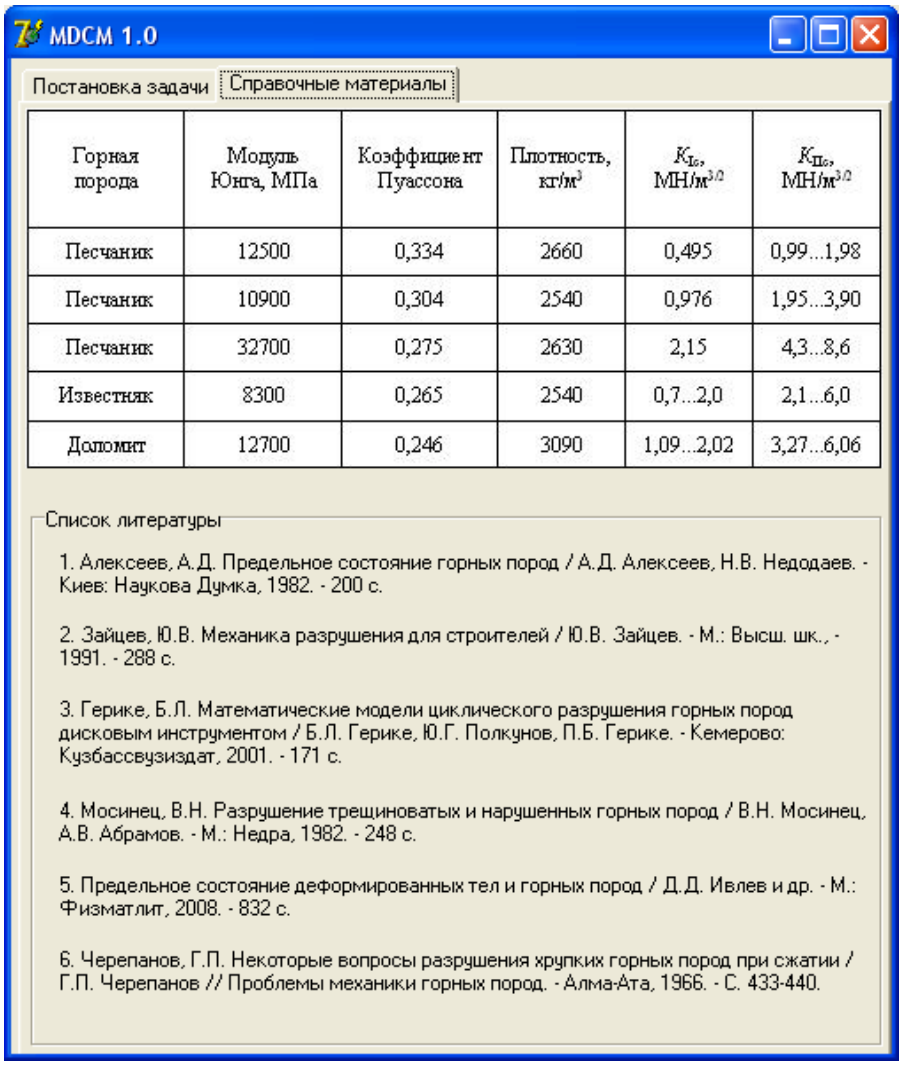


Рис.2.3 Внешний вид основного диалогового окна

Основное диалоговое окно позволяет моделировать задачи по вычислению нормальных и сдвиговых раскрытий трещины для сплошного материала, материала нарушенного трещиной, а так же от различных функций нормальных смещений берегов основной трещины. Вкладка “**Постановка задачи**” содержит поле “**Ввод данных**”, которое позволяет вводить характеристики материала, краевые условия на основной и зияющей частях трещины, а также использовать опцию решения задачи с учетом гравитационных сил.



MDCM 1.0

Постановка задачи | Справочные материалы

Горная порода	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона	Плотность, кг/м^3	K_{Ic}, МН/м$^{3/2}$	K_{IIc}, МН/м$^{3/2}$
Песчаник	12500	0,334	2660	0,495	0,99...1,98
Песчаник	10900	0,304	2540	0,976	1,95...3,90
Песчаник	32700	0,275	2630	2,15	4,3...8,6
Известняк	8300	0,265	2540	0,7...2,0	2,1...6,0
Доломит	12700	0,246	3090	1,09...2,02	3,27...6,06

Список литературы

1. Алексеев, А.Д. Предельное состояние горных пород / А.Д. Алексеев, Н.В. Недодаев. - Киев: Наукова Думка, 1982. - 200 с.

2. Зайцев, Ю.В. Механика разрушения для строителей / Ю.В. Зайцев. - М.: Высш. шк., - 1991. - 288 с.

3. Герике, Б.Л. Математические модели циклического разрушения горных пород дисковым инструментом / Б.Л. Герике, Ю.Г. Полкунов, П.Б. Герике. - Кемерово: Кузбассвузиздат, 2001. - 171 с.

4. Мосинец, В.Н. Разрушение трещиноватых и нарушенных горных пород / В.Н. Мосинец, А.В. Абрамов. - М.: Недра, 1982. - 248 с.

5. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д.Д. Ивлев и др. - М.: Физматлит, 2008. - 832 с.

6. Черепанов, Г.П. Некоторые вопросы разрушения хрупких горных пород при сжатии / Г.П. Черепанов // Проблемы механики горных пород. - Алма-Ата, 1966. - С. 433-440.

Рис.2.4 Внешний вид диалогового окна «Справочные материалы»

Вкладка “**Справочные материалы**” содержит информацию по основным характеристикам пород: плотность пород, модуль Юнга, коэффициент Пуассона.

Вкладка “**Ввод данных**” содержит кнопки “**Параметры нарушения**” и “**Задать *f(x)***”, которые загораются после того, как пользователь поставит «галочку» в пункте “Материал, нарушенный трещиной”, либо “$u_n = f(x)$”. При нажатии кнопки “**Параметры нарушения**” на экране появляется диалоговое окно “**Характеристики нарушения**” (рис.2.5), с помощью которого производится ввод необходимых для проведения расчета характеристик наклонной трещины, при этом формируется схема, моделирующая развитие трещины в нарушенном материале.

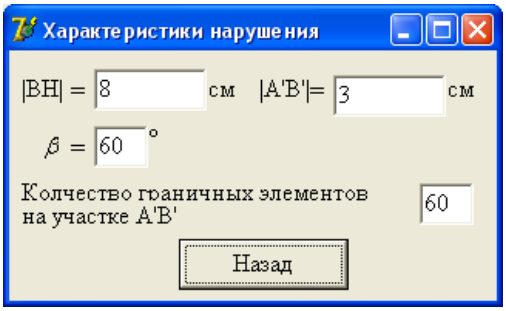


Рис.2.5 Внешний вид диалогового окна «Характеристики нарушения»

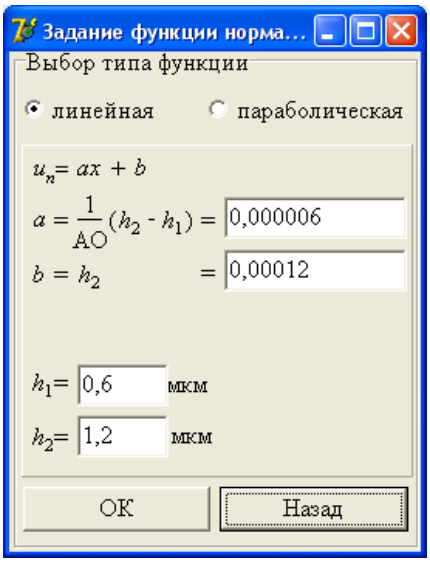


Рис.2.6 Вкладка параметров нарушения

При нажатии кнопки “**Параметры нарушения**” на экране появляется диалоговое окно “**Задание функций нормальных смещений на участке АО**” (рис.2.6). Данное окно позволяет выбрать тип функции нормальных смещений берегов трещины АО, и ввести необходимые для расчета входные данные.

Вкладка “**Постановка задачи**” содержит кнопку “**Расчет**”, при нажатии которой считываются введенные пользователем входные данные и запускаются программные модули. После нажатия на кнопку “**Расчет**” на экране появляется диалоговое окно “**Результаты моделирования**” (рис.2.7-2.9), которое выводит на экран монитора таблицу раскрытий зияющей части трещины и их графическую интерпретацию в виде схемы раскрытий.

Данное диалоговое окно позволяет выводить на экран нормальные и сдвиговые разрывы смещений берегов участков АО, ОВ, а также всей трещины АВ (рис. 2.7, 2.8) и наклонной трещины A′B′ (рис.2.9). Возможна визуализация графика только одного типа выбранного пользователем. Схема раскрытий (для удобства пользователя) может выдаваться по модулю и «без модуля».

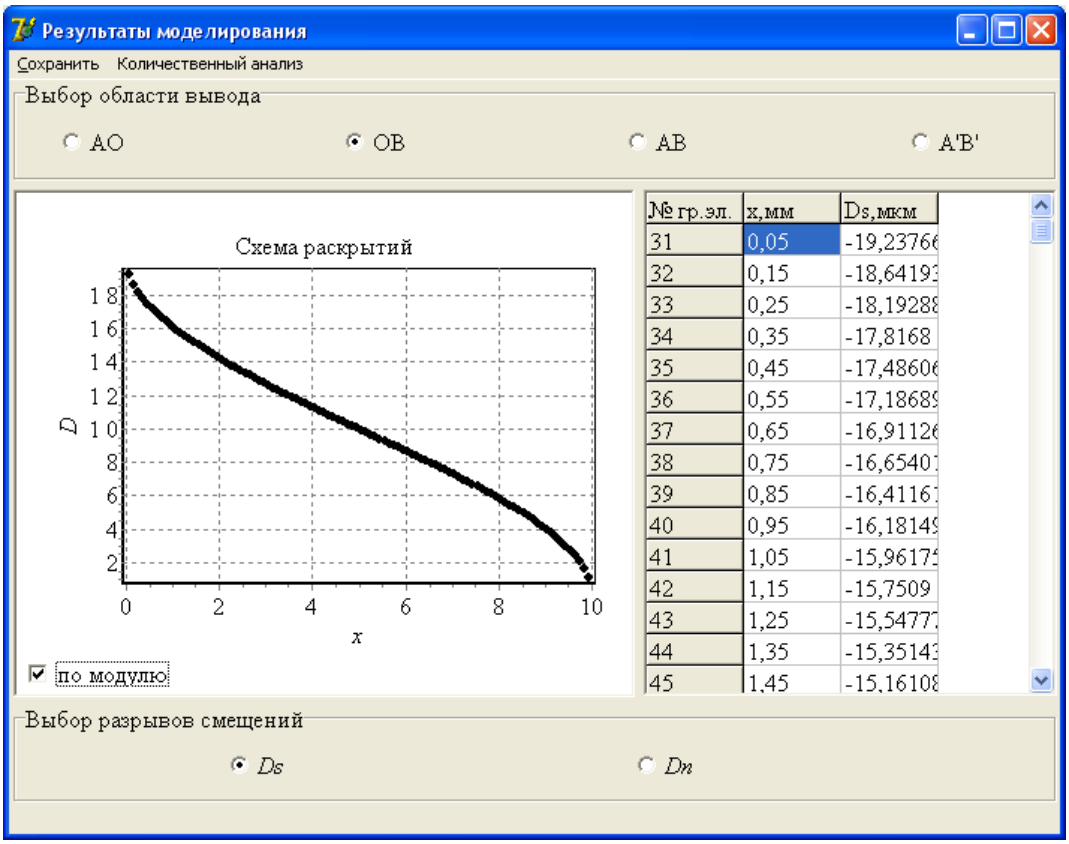


Рис.2.7 Внешний вид диалогового окна «Результаты моделирования»: сдвиговое раскрытие трещины OB

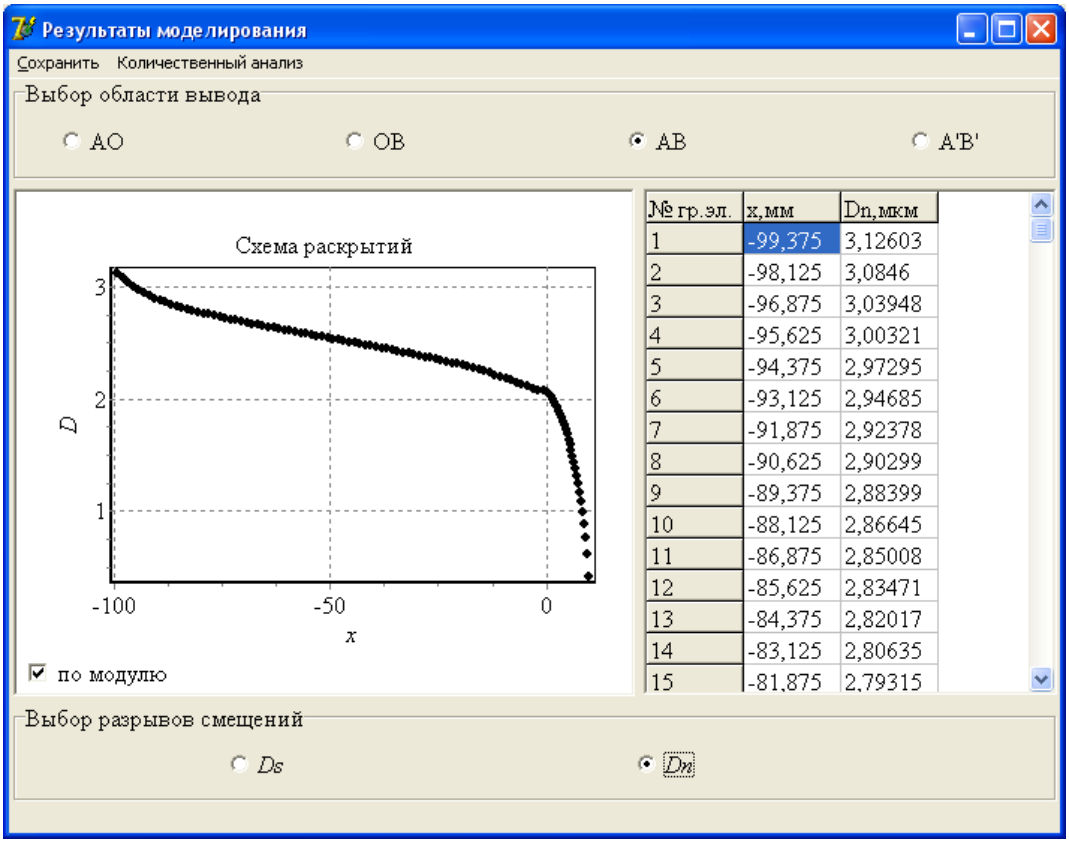


Рис.2.8 Внешний вид диалогового окна «Результаты моделирования»: сдвиговое раскрытие трещины AB

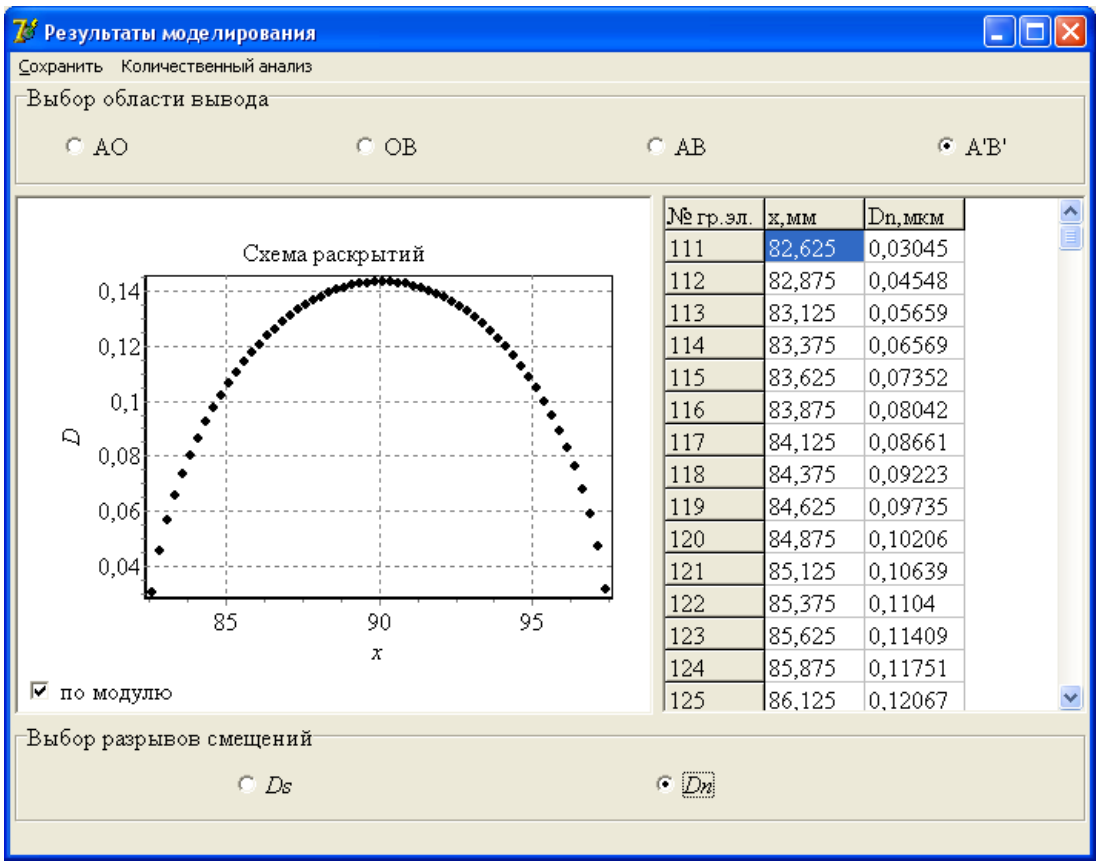


Рис.2.9 Внешний вид диалогового окна «Результаты моделирования»: нормальное раскрытие трещины A’B’

Диалоговое окно “**Результаты моделирования**” содержит две вкладки - **“Сохранить”** и **“Количественный анализ”**. С помощью вкладки **“Сохранить”** пользователь может сохранить таблицу и схему раскрытий в отдельные файлы с расширениями стандартного файла изображения *.bmp и таблиц приложения MS Excel *.xls.

Вкладка **“Количественный анализ”** содержит две вкладки - **“Интерполяция”** для построения кривой интерполяции (рис.2.10, линия розового цвета) и **“Аппроксимация”,** которая позволяет задавать тип функции аппроксимации и ее параметры, после чего на экране появляется кривая аппроксимации (рис.2.11, линия синего цвета).

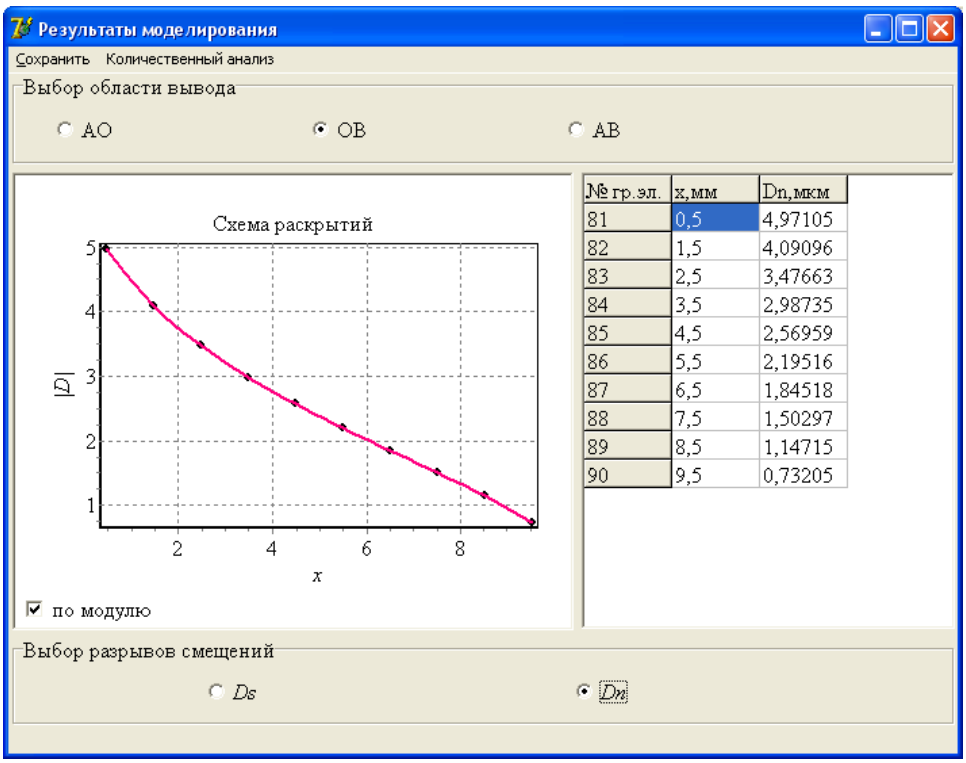


Рис.2.10 Внешний вид диалогового окна «Результаты моделирования»: кривая интерполяции

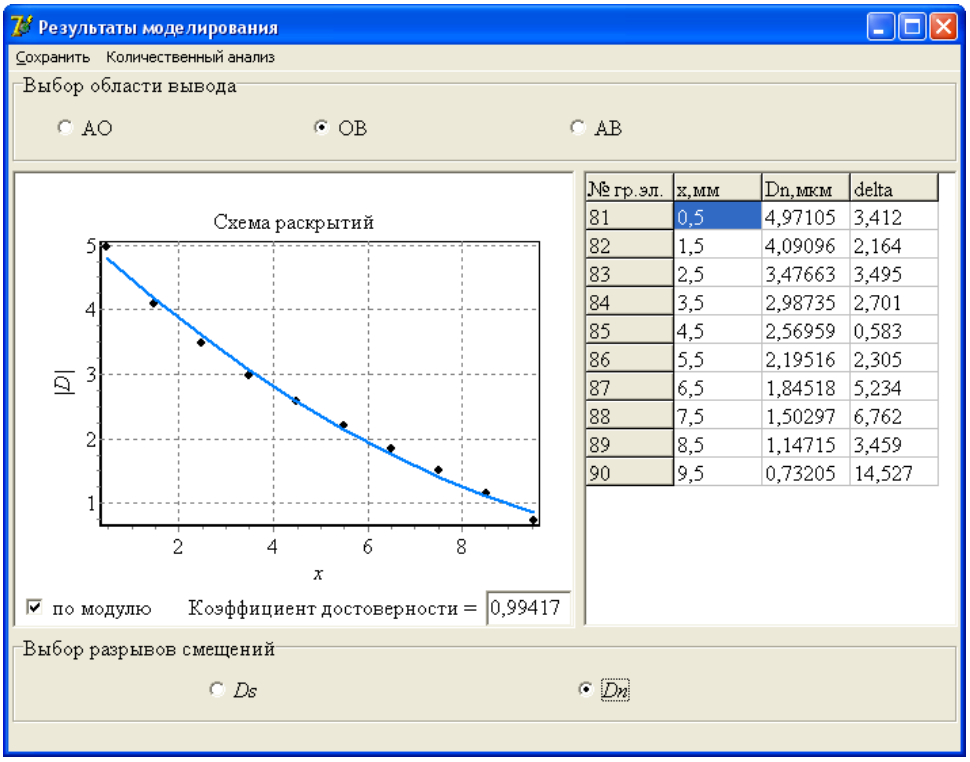


Рис.2.11 Внешний вид диалогового окна «Результаты моделирования»: кривая аппроксимации

Вкладка **“Параметры аппроксимации”** (рис.2.12,2.13), позволяет выводить на экран монитора погрешность и коэффициент достоверности кривой ап-

проксимации, который показывает степень соответствия трендовой модели исходным данным. Его значение может лежать в диапазоне от 0 до 1 (чем ближе он к 1, тем выше точность вычислений по имеющимся данным).

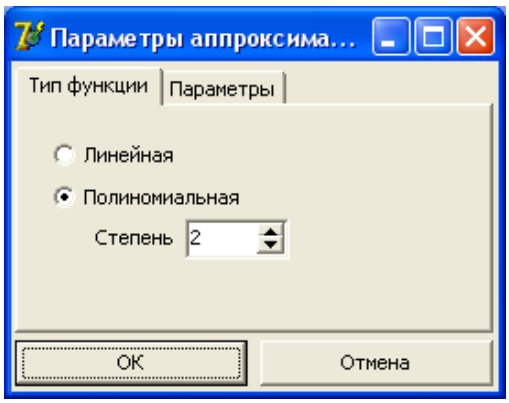


Рис.2.12 Внешний вид диалогового окна «Параметры аппроксимации»: тип функции

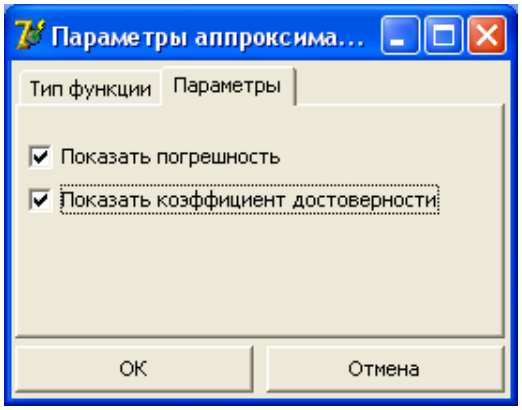


Рис.2.13 Внешний вид диалогового окна «Параметры аппроксимации»: параметры

Состав программы *QualAn* 1.0:

- модуль *Main* производит считывание входных данных из диалогового окна, расчет и анализ;

- модуль *Grafik* осуществляет построение графиков подобных раскрытий.

Главное диалоговое окно данной программы (рис. 2.14, 2.15) содержит поля, в которых отображается информация по выбору задачи, величины отклонения (%) и кнопку управления расчетом “**Анализ**”. Программа автоматически осуществляет расчет номера задачи и выводит его на экран.

После нажатия на кнопку “**Анализ**” программа считывает данные из файлов, находит подобные столбцы раскрытий и отображает результаты расчетов на экран в виде таблиц и графиков. Таблицы и графики выводятся на экран монитора для трех случаев (подобие раскрытий для основной части, зияющей части трещины и всей трещины), причем каждый из этих случаев разбивается еще на два - полное и зеркальное подобие. На рисунках последние объединены в один. Кривые нормальных раскрытий на рисунках изображаются розовым цветом, с учетом гравитационных сил – синим; сдвиговых раскрытий – черным, с учетом гравитационных сил – голубым.

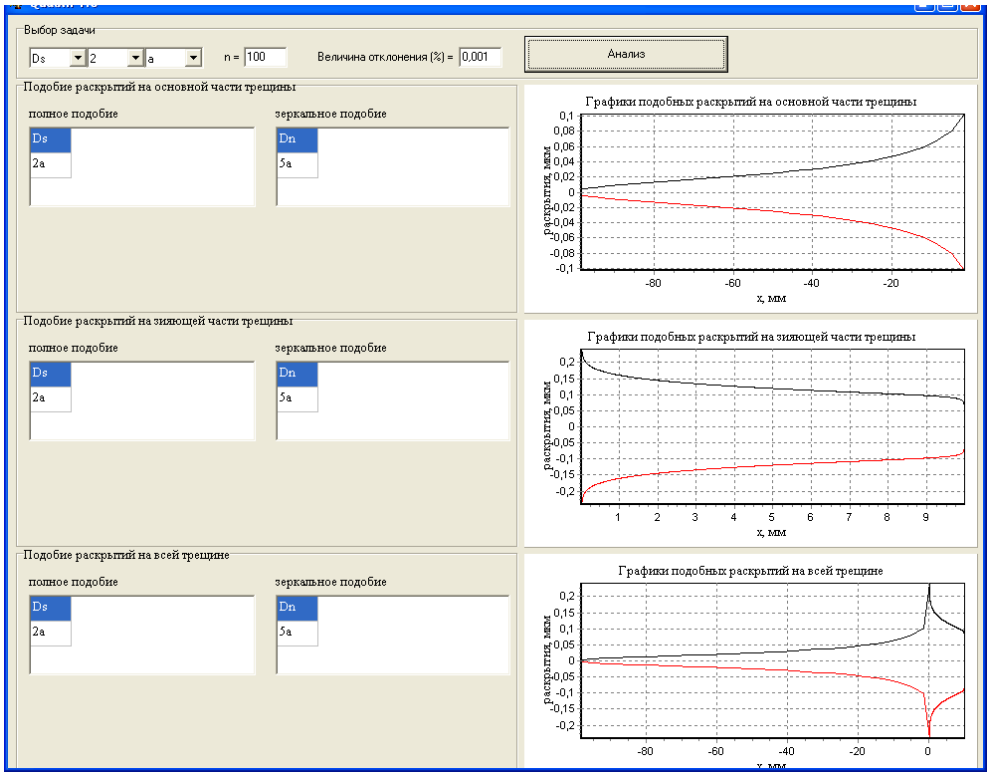


Рис.2.14 Внешний вид основного диалогового окна программы *QualAn* 1.0: субкомбинация 2a, r=0.001%.

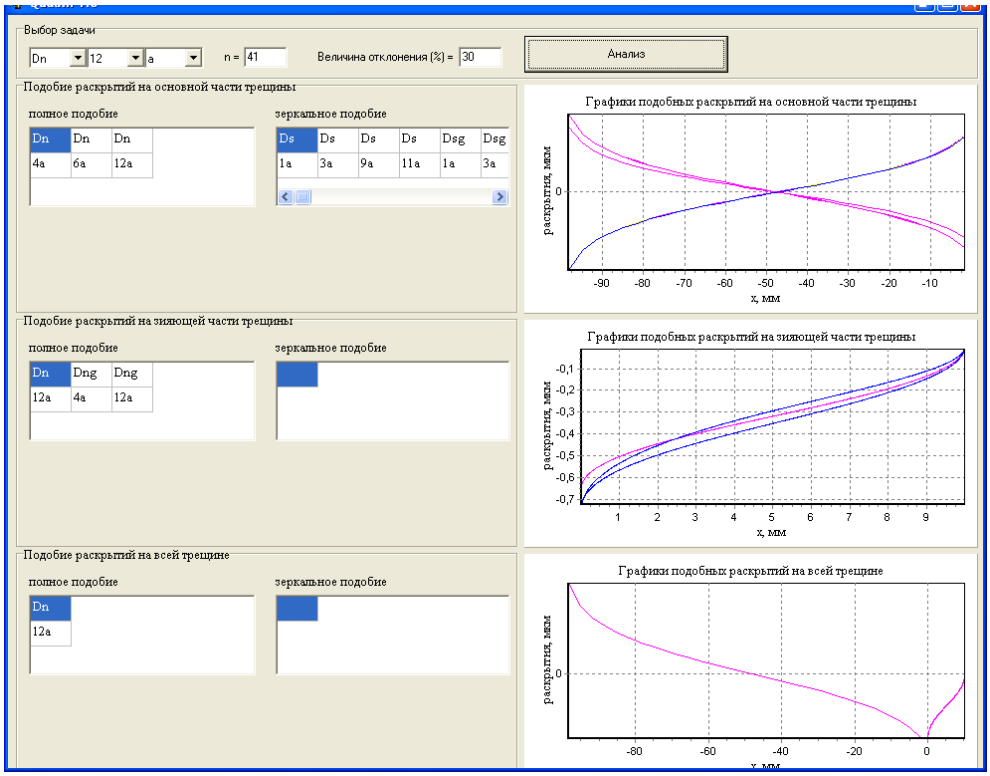


Рис.2.15 Внешний вид основного диалогового окна программы *QualAn* 1.0: субкомбинация 12a, r=30%.

Анализ идентичности распределения разрывов смещений берегов трещины позволяет пользователю определить степень подобия нормальных и сдвиговых раскрытий трещины, а также ГУ, для которых действием массовых сил можно пренебречь.

2.4 Анализ идентичности распределений разрывов смещений берегов раскрывающихся трещин на примере трещины в песчанике

Таблица 2.1 содержит обширное количество вариантов постановки краевых задач теории трещин с СКУ. Комбинации 1-3 описывают трещину отрыва, комбинации 4-6 – трещину сдвига, а все остальные – трещину смешанного типа. Из 48 субкомбинаций трещины смешанного типа составляют 2/3 их количества. В этой связи ниже представлен анализ идентичности распределений разрывов смещений берегов раскрывающихся и нераскрывающихся трещин, выполненный на основе результатов ВЭ для всех субкомбинаций трещин в песчанике, при следующих исходных данных:

$$L_0 = 10 \text{ мм – длина OB}, \quad x \in [0, L_0], \tag{2.8}$$

$$b = 10L_0 \text{ – длина OA}, \quad x \in [-b, 0], \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u}_0 = -1.2 \text{ мкм – смещение берегов}, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = -98 \text{ кН/м}^2 \text{ – напряжение на берегах}, \tag{2.11}$$

$$E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \ \nu = 0.3 \text{ – механические свойства песчаника}, \tag{2.12}$$

$$J' = 30 \text{ – количество граничных элементов на OA}, \tag{2.13}$$

$$J - J' = 750 \text{ – количество граничных элементов на OB}. \tag{2.14}$$

Ввиду того, что анализ идентичности производится по результатам ВЭ, то представленные исходные данные (2.8)-(2.14) являются наиболее близкими к исходным данным, использованным в работах [53-60,73-77,79-80]. По этой причине результаты анализа идентичности, представленные ниже, имеют ограничение общности, а их достоверность подтверждается количественным анализом, опубликованным в указанных работах и представленным в Главе 3.

Обратимся к вопросу об устойчивости решения СЛАУ, образуемых в рамках МРС. Граничные условия для каждого граничного элемента в (1.38) могут быть заданы с различной точностью. Известно, что для проверки устойчивости [66] правой части СЛАУ достаточно для объединенной матрицы проверить выполнимость условия

$$\det\{C\} \neq 0,\ \{C\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \{B_{ss}\} + \{B_{ns}\} & \{A_{ss}\} + \{A_{ns}\} \\ \hline \{B_{sn}\} + \{B_{nn}\} & \{A_{sn}\} + \{A_{nn}\} \end{array} \right\}. \tag{2.15}$$

Связь между относительными погрешностями правой и левой частей устанавливается на основе числа обусловленности

$$m_C = \left\| C^{-1} \right\| \cdot \left\| C \right\|, \tag{2.16}$$

позволяющего вычислить относительную погрешность решения системы (1.38) методом Гаусса как

$$\Delta_C = O\left[2^{-t} m_C \dim(C) \right], \tag{2.17}$$

где t – число разрядов мантиссы в двоичном представлении чисел на ЭВМ с плавающей запятой. С целью проверки устойчивости решения СЛАУ пункт 4 алгоритма §2.2 реализовывался двумя методами – методом Гаусса и методом QR-разложения, поскольку последний не зависит от (2.16). В ходе анализа идентичности распределений получены результаты, свидетельствующие о том, что для всех решений СЛАУ характерна полная идентичность результатов каждым из методов. В связи с этим предпочтительным является метод Гаусса, эффективный из-за меньшего объема вычислений. Следует отметить, что в рамках метода Гаусса использовались преобразования, позволяющие получить детерминант, равный 1, что автоматически исключает необходимость проверки условия (2.16). Они включали в себя построчную нормировку строк матрицы на наибольшее значение элемента матрицы $\{C\}$ в строке, после чего матрица приводилась к треугольному виду. В связи с этим точность ВЭ при $t = 53$ и (2.13)-(2.14) составила 10^{-13}. Решение методом Гаусса выводились в программном комплексе, описание которого представлено выше, с точностью до 3-го знака после запятой, с чем и связан выбор значения (2.14).

Анализ идентичности по позициям таблицы 2.1 каждого из 48 вариантов между собой выполняется следующим образом.

Решение краевой задачи теории трещин для субкомбинаций таблицы 2.1 позволяет получить распределение функций нормальных и сдвиговых разрывов в отсутствии массовых сил (g=0) и в их присутствии (g≠0). В итоге получается 48×4=192 вариантов представления функционалов распределения разрывов вдоль трещины. Учитывая, что трещина разделена на основную и зияющую части, при сравнении целесообразно проводить анализ отдельно для каждой, поскольку отклонения в общем случае различны для них.

В качестве ограничений на идентичность распределений были выбраны значения максимального по всей длине трещины (или ее части) отклонения

$$\delta_p(x) = \left| \frac{\left[D_p(x)\right]_{g=0} \pm \left[D_{p'}(x)\right]_{g\neq 0}}{\left[D_p(x)\right]_{g=0}} \right| \cdot 100\%,\ p, p' = \{n, s\}, \tag{2.18}$$

удовлетворяющие условию

$$\max\left(\delta_p\right) \le r. \tag{2.19}$$

В связи с этим будем считать (2.19) условием идентичности распределения функций разрывов. При этом результатом выполнения (2.19) являются: 1) идентичность в основной части трещины (АО); 2) идентичность в зияющей части трещины (ОВ); 3) полная идентичность (во всех частях) (АВ).

Значение $\max\left(\delta_p\right) \approx 0$ для всех граничных элементов означает абсолютную идентичность распределений. Следует отметить, что вычисление разрывов с математической точки зрения корректно при любом расстоянии между берегами трещины, а с физической – только при условии превышения начального расстояния между ними величины разрыва. Поэтому исходная ширина трещины (расстояние между берегами) в рамках диссертации не используется, но подразумевается, что расстояние между берегами достаточно, чтобы не нарушать корректность постановки и решения краевой задачи с физической точки зрения.

В таблицах 2.2-2.5 представлены результаты анализа идентичности распределений для указанных в таблице 2.1 вариантов, наблюдаемых для субкомбинаций[1], приведенных в первых столбцах таблиц. В (2.19) для таблиц 2.2-2.5 принято

$$r = 0.001\%. \qquad (2.20)$$

Знаки «+» и «–» определяют выбор такого же знака в числителе дроби (2.18) . Фактически знак «+» показывает, что распределение разрывов является зеркальной идентичностью распределения относительно оси абсцисс, указанном в первом столбце таблицы. Также в таблицах 2.3 и 2.5 исключены строки, дублирующие данные для одинаковых субкомбинаций таблиц 2.4 и 2.6 соответственно.

Таблица 2.2

Идентичность субкомбинаций для D_n

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Субкомби-нация</th><th colspan="4">Идентичные компоненты</th></tr>
<tr><th>D_n</th><th>D_n^g</th><th>D_s</th><th>D_s^g</th></tr>
<tr><td>1а</td><td rowspan="15">АВ</td><td>1а (-)</td><td></td><td>4а (-)</td><td></td></tr>
<tr><td>1б</td><td>1б (-)</td><td></td><td>4б (-)</td><td></td></tr>
<tr><td>1в</td><td colspan="2">1в (-)</td><td colspan="2">4в (-)</td></tr>
<tr><td>2а</td><td>2а (-)</td><td></td><td>5а (-)</td><td></td></tr>
<tr><td>2б</td><td>2б (-)</td><td></td><td>5б (-)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2в, 8(в,е,и)</td><td colspan="2" rowspan="2">2в,8(в,е,и) (-)</td><td rowspan="2">5в,8(г,ж,и) (-)</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>4а</td><td>4а (-)</td><td></td><td>1а (+)</td><td></td></tr>
<tr><td>4б</td><td>4б (-)</td><td></td><td>1б (+)</td><td></td></tr>
<tr><td>4в</td><td colspan="2">4в (-)</td><td colspan="2">1в (+)</td></tr>
<tr><td>5а</td><td>5а (-)</td><td></td><td>2а (+)</td><td></td></tr>
<tr><td>5б</td><td>5б (-)</td><td></td><td>2б (+)</td><td></td></tr>
<tr><td>7г</td><td colspan="2">7г (-)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7ж</td><td colspan="2">7ж (-)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7и</td><td colspan="2">7и (-)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">8г</td><td>АО</td><td rowspan="2">8г (-)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ОВ</td><td></td><td colspan="2">8в (+)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8ж</td><td>АО</td><td>8ж (-)</td><td></td><td colspan="2">8е (+)</td></tr>
<tr><td>ОВ</td><td>8ж (-)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9б</td><td rowspan="4">АВ</td><td rowspan="2">9б,10а (-)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10а</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10б</td><td rowspan="2">10б,13а (-)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13а</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

[1] Не приведенные в таблице субкомбинации следует считать не имеющими подобия.

Таблица 2.3

Идентичность субкомбинаций для D_n^g

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
9б			9б,10а (-)		
10а					
10б			10б,13а (-)		
13а					

Таблица 2.4

Идентичность субкомбинаций для D_s

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
1а	АВ	4а (+)		1а (-)	
1б		4б (+)		1б (-)	
1в		4в (-)		**1в (-)**	
2а		5а (+)		2а (-)	
2б		5б (+)		2б (-)	
4а		1а (-)		4а (-)	
4б		1б (-)		4б (-)	
4в		1в (-)		**4в (-)**	
5а		2а (-)		5а (-)	
5б		2б (-)		5б (-)	
5в, 8(г,ж,и)		2в,8(в,е,и) (-)		5в,8(г,ж,и) (-)	
7г				**7г (-)**	
7ж				**7ж (-)**	
7и				**7и (-)**	
8в	АО			8в (-)	
	ОВ	8г (+)		**8в (-)**	
8е	АО	8ж (+)		**8е (-)**	
	ОВ			8е (-)	
9б	АВ			9б,10а (-)	
10а					
10б				10б,13а (-)	
13а					

Таблица 2.5

Идентичность субкомбинаций для D_s^g

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
5в, 8(г,ж,и)	АВ				5в,8(г,ж,и) (-)
8в	АО	8г (+)			8в (-)
	ОВ			**8в (-)**	
8е	АО	8ж (+)		**8е (-)**	
	ОВ				8е (-)
9б	АВ				9б,10а (-)
10а					
10б					10б,13а (-)
13а					

Отличие максимумов в распределениях очень мало, и поэтому совпадение субкомбинаций в парах (D_n, D_n^g) и (D_s, D_s^g) фактически означает незначительное влияние массовых сил на распределение однотипных разрывов (нормальных или сдвиговых). Такие субкомбинации в таблицах 2.2-2.5 выделены жирным шрифтом. В таблицах 2.2-2.5 этому условию удовлетворяют субкомбинации **1в, 2в, 4в, 7(г,ж,и)** и **8(в,е,и)**, где идентичность распределений нормальных разрывов наблюдается вдоль всей трещины. Таким образом, влиянием массовых сил при решении краевых задача теории трещин со смешанными краевыми условиями можно пренебречь на всей трещине для субкомбинаций **1в, 4в** (Рис.2.16), **7(г,ж,и)** (Рис.2.17), **8(в,е)** (Рис.2.18).

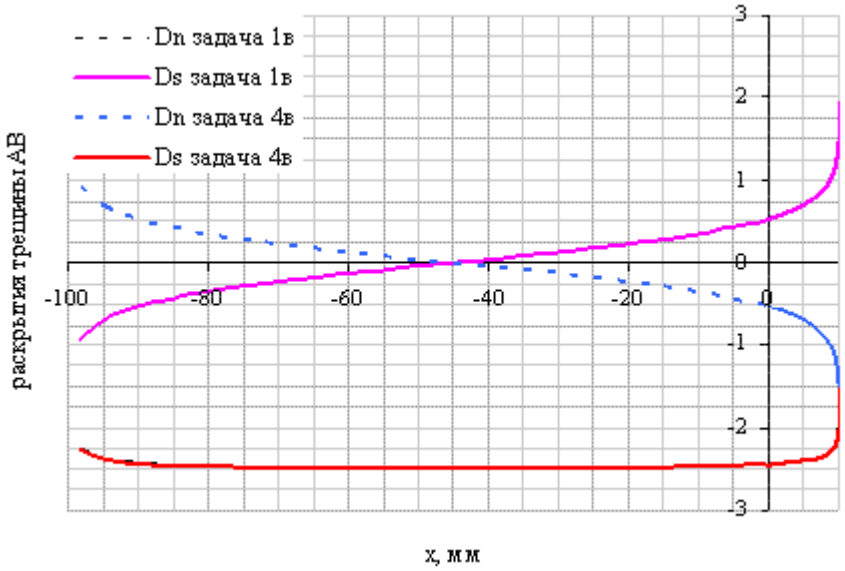


Рис.2.16 Раскрытия трещины в субкомбинациях 1в,4в

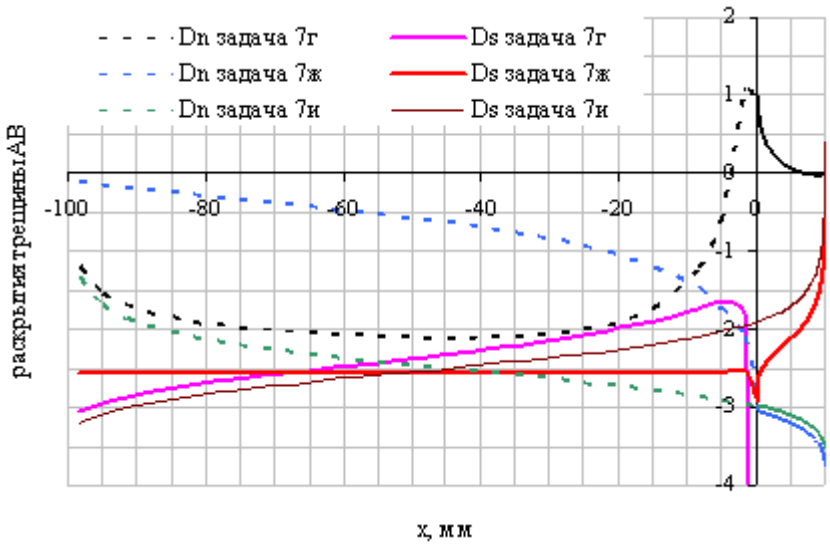


Рис.2.17 Раскрытия трещины в субкомбинациях 7(г,ж,и)

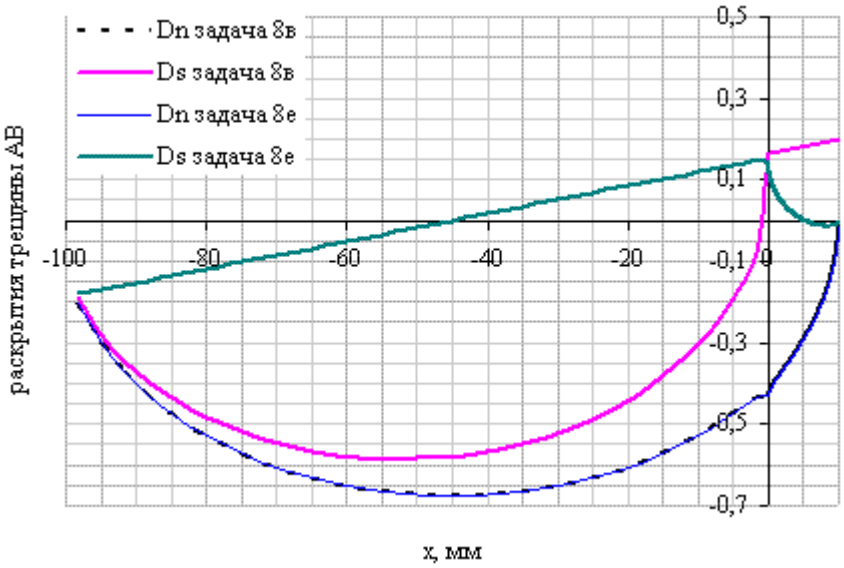


Рис.2.18 Раскрытия трещины в субкомбинациях 8(в,е)

Поскольку идентичность субкомбинаций 2в и 8и определено только для нормальных разрывов, то массовыми силами в этом случае пренебрегать нельзя.

Совпадение в любых других парах следует понимать как существование идентичности распределения у неоднотипных разрывов. Так, например, для всей трещины в таблице 2.2 имеется идентичность между нормальными смещениями в комбинации №1 и сдвиговыми в комбинации №4, а зеркальное – между их антиподами, т.е. между нормальными в комбинации №4 и сдвиговыми в комбинации №1. Аналогично для комбинаций №2 и №5. Особое внимание обращает на себя

сочетание 2в,8(в,е,и) - для него имеется идентичность между однотипными и неоднотипными разрывами.

Таким образом, по результатам анализа идентичности можно сделать выводы о следующем:

1) идентичность однотипных разрывов позволяет оценить влияние массовых сил на развитие трещины в различных ее частях;

2) идентичность неоднотипных разрывов позволяет найти постановки задач, дублирующие результаты одного из типов, и ограничить число используемых субкомбинаций в рамках количественного анализа;

3) идентичность какой-либо субкомбинации одной из субкомбинаций 1а-1в позволяет использовать при аппроксимации нормальных и сдвиговых раскрытий в зияющей части аналитические формулы Черепанова.

Следует отметить, что полученные результаты определены при условии (2.19), в котором принято значение (2.20). Очевидно, что с увеличением r набор субкомбинаций, удовлетворяющих (2.19), будет возрастать. В частности, согласно [4,86] погрешность расчетов разрывов для трещин в горных породах может достигать 30%. В связи с этим в приложении приводятся таблицы П1-П4, в которых представлены субкомбинации, образующиеся при

$$r = 30\%. \qquad (2.21)$$

Из них исключены субкомбинации, обеспечивающие согласно таблицам 2.2-2.5 полная идентичность, т.е. **1в, 4в, 7(г,ж,и)** и **8(в,е)**. Также из таблиц П2 и П4 исключены дублирующие субкомбинации соответственно таблиц П1 и П3. Влиянием гравитационных сил в пределах погрешности 30% наряду с указанными в таблицах 2.2-2.5 можно пренебречь в субкомбинациях ГУ, приведенных ниже.

Таблица П1:

на АВ – 1а, 2а, 3в, 4а, 6в, 7(б,в,д), 8и, 9а, 11а, 13б, 14б и 15б;

на ОВ – 12а.

Таблица П2:

на АВ – 1(а,в), 3а, 4(а,в), 7(б,в,г,д,ж,и), 8(в,е,и), 9а, 11а, 12а, 13б, 14б и 15б;

на ОВ – 6а.

Таблица П3:

на АВ – 1в, 4в, 7ж и 7и; на АО - 4а, 6а, 7(б,в,г,д), 8е, 12(а,б), 13б и 14б;

на ОВ – 4б, 6б и 7а.

Таблица П4:

на АВ – 1в, 4в, 7(г,ж,и); на АО - 4а, 6а, 7(а,б,в,д), 8е, 12а, 13б, 14б;

на ОВ – 4б,8в и 12б.

Обращаясь к субкомбинациям, идентичность которых определена для зияющей части трещины, следует отметить, что развитие трещины отрыва имеет аналитическое описание, развитое в работах Г.П. Черепанова [97,98]. Поэтому детальный анализ поведения распределения функций разрывов вблизи вершины трещины позволяет воспользоваться численными решениями краевых задач теории трещин в расчетах КИН. В этом случае проблема аналитического представления разрывов вблизи вершины трещины от координаты решается путем применения аппроксимации функций распределения разрывов (2.4) и (2.5). Полученная аппроксимирующая функция позволяет сохранить применимость аналитических формул Черепанова для описания распределений разрывов берегов трещин смешанного типа и использовать в расчетах КИН формулы, приведенные в работах Линькова, без образования особенностей функций в предельных соотношениях (1.84) и (1.85).

2.5 Качественный анализ решений краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями

Функции смещения $D_n(x)$ и $D_s(x)$ представляют собой непрерывные функции по все длине трещины. Их аппроксимация является необходимой процедурой верификации решения и в дальнейшем используется для вычисления КИН. Верификация показывает качественное соответствие решения физическим особенностям образования трещины.

В рамках качественного анализа решений можно выделить ряд параметров, варьирование которых определяет область решений. К ним относятся механиче-

ские свойства (плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона), длина трещины (общая АВ или ее участков), а также распределение граничных условий на участках АО и ОВ ("смещения-напряжения" или "напряжения-смещения").

Как показывают результаты расчетов, плотность материала имеет ничтожно малое воздействие на формирование функций смещения берегов трещины. Так, изменение плотности приводит к относительному изменению значений смещений на величину менее 10^{-3}. Поэтому в рамках представленного в параграфе качественного анализа ее значение зафиксировано значением ρ=5000 кг/м^3, диапазон изменений модуля Юнга - от 10^6 до 10^{13} Па, коэффициента Пуассона - от 0.1 до 0.49. Приведенные диапазоны перекрывают подавляющее большинство механических свойств твердых тел, известных в настоящее время. Поэтому данные анализа справедливы не только для геоматериалов, но для тех упругих материалов, которые к ним потенциально могут и не относиться (металлы и др.).

Следует отметить, что существенными ограничениями данных качественного анализа решений краевых задач теории трещин с СКУ к материалам, которые не относятся к геоматериалам, является применимость к ним модели математического разреза как геометрической модели трещины, а также наличие возможности смешанного распределения нагрузок на берегах трещины в указанном выше виде. По этой причине в рамках качественного анализа рассматривались макро- и микротрещины. Начальная длина участка АО - основной части трещины, - варьировалась от 100 мм до 1 мкм при соотношении для зияющей части трещины ОВ=1/10 АО.

Ниже представлены таблицы значений смещений в срединных точках участков АО и ОВ. В паре значений верхнее относится к участку АО, нижнее к участку ОВ, а также выводы, касающиеся поведения берегов трещины в зависимости от механических свойств, длины трещины и приложенных граничных условий.

В таблицах 2.5.1-2.5.4 и 2.5.9-2.5.12 представлены смещения при распределении ГУ "смещения-напряжения", в таблицах 2.5.5-2.5.8 и 2.5.13-2.5.16 - при

распределении ГУ "напряжения-смещения". В таблицах 2.5.1-2.5.8 длина трещины равна 100 мм, в таблицах 2.5.9-2.5.16 равна 10 мм.

Распределение ГУ - "смещения - напряжения"
(на АО заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм, на ОВ заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа)

Таблица 2.5.1
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-703 19140	-68 1915	-4.84 192	1.50 20.37	2.14 3.15	2.2 1.43	2.21 1.26	2.21 1.24
	0.2	-52 1883	-52 1883	-3.28 189	1.6 20.00	2.087 3.06	2.13 1.37	2.14 1.199	2.14 1.82
	0.3	-34 1815	-34 1815	-1.53 182	1.71 19.25	2.04 2.92	2.07 1.29	2.077 1.127	2.077 1.111
	0.4	-15 1711	-15 1711	0.28 172	1.85 18.12	2.01 2.73	2.02 1.19	2.024 1.039	2.024 1.024
	0.49	0.423 1586	0.423 1586	1.84 159	1.98 16.77	1.99 2.51	2.00 1.079	2.00 0.937	2.00 0.923

Таблица 2.5.2
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	17 2228	17 2228	3.73 223	2.38 22.85	2.24 2.8	2.23 0.798	2.21 1.25	2.23 0.578
	0.2	19 2135	19 2135	3.88 214	2.33 21.98	2.17 2.77	2.15 0.85	2.15 0.66	2.156 0.639
	0.3	18 1994	18 1994	3.73 200	2.25 20.64	2.10 2.7	2.08 0.907	2.088 0.728	2.087 0.71
	0.4	13 1806	13 1806	3.17 181	2.14 18.85	2.04 2.6	2.03 0.975	2.03 0.812	2.023 0.796
	0.49	3.5 1596	3.5 1596	2.15 160	2.01 16.85	2.00 2.49	2.00 1.054	2.00 0.91	2.00 0.896

Таблица 2.5.3
Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-3150 10217	-313 1022	-29.3 103	-0.94 11.45	1.895 2.26	2.795 1.34	2.208 1.25	2.211 1.241
	0.2	-5142 2664	-512 267	-49 27.8	3.00 3.84	1.628 1.44	2.09 1.207	2.14 1.18	2.141 1.18
	0.3	-6162 -1532	-614 -152	-59 -14.25	-4.087 -0.427	1.46 0.955	2.016 1.094	2.071 1.107	2.077 1.109
	0.4	-5100	-508	-49	-3.079	1.514	1.973	2.019	2.024

		852	86	9.54	1.87	1.107	1.03	1.023	1.022
	0.49	-774 13379	-75 1338	-5.76 134	1.22 14.3	1.922 2.259	1.99 1.055	1.999 0.934	1.999 0.922

Таблица 2.5.4

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-1428 140927	-140 14095	-12 1410	-0.797 141	2.085 14.67	2.214 1.985	2.227 0.717	2.228 0.59
	0.2	-2194 280300	-217 28030	-19 2803	-0.041 281	1.936 28.66	2.134 3.44	2.154 0.917	2.156 0.665
	0.3	-1991 440799	-197 44080	-17.8 4408	0.095 441	1.889 44.79	2.068 5.116	2.086 1.149	2.088 0.752
	0.4	-906 622449	-88 62245	-7.06 6225	1.12 623	1.94 63	2.021 7.019	2.029 1.417	2.03 0.857
	0.49	-1.14 803986	1.67 80399	1.97 8040	1.997 805	2.00 81.3	2.00 8.934	2.00 1.699	2.00 0.975

Табл. 2.5.1. Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является линейной, монотонно возрастает с ростом ν в основной части трещины. В зияющей части является нелинейной, близкой к параболе, и монотонно убывает с ростом ν.

Табл. 2.5.3. С учетом тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным минимумом. Значения смещений убывают на участке до ν=0.3 и затем возрастают с ростом ν как в основной, так в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.2. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным максимумом на участке АО при ν=0.2. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений уменьшаются с ростом ν.

Табл. 2.5.4. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным минимумом на участке АО. График функции монотонно убывает до ν=0.2 и затем увеличивается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.1-2.5.4 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$

сближаются и при максимальном взятом в расчетах значении $E=10^{13}$ Па совпадают. На участке основной части трещины графики стремятся пересечься при $\nu=0.5$.

Распределение ГУ - "напряжения - смещения"
(на АО заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа; на ОВ заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм)

Таблица 2.5.5
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	212204 41725	21200 4175	2122 420	212 44.24	21.64 6.69	2.54 2.94	0.63 2.56	0.44 2.53
	0.2	204321 36472	20432 3649	2043 367	204.5 38.88	20.843 6.057	2.45 2.77	0.6152 2.44	0.431 2.413
	0.3	191799 28359	19180 2838	1918 286	192 30.64	19.57 5.12	2.32 2.57	0.59 2.31	0.42 2.29
	0.4	174559 16647	17456 1667	1746 169	175 18.80	17.84 3.82	2.13 2.32	0.56 2.17	0.401 2.15
	0.49	154878 1953	15488 197	1549 21.531	155 3.96	15.86 2.211	1.92 2.035	0.525 2.018	0.385 2.016

Таблица 2.5.6
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	186086 -78594	18608 -7858	1861 -784	186 -76	18.95 -6.14	2.203 0.928	0.53 1.636	0.36 1.71
	0.2	183124 -61078	18313 -6106	1832 -609	183 -59	18.66 -4.35	2.177 1.14	0.53 1.692	0.364 1.746
	0.3	176615 -41453	17662 -4144	1766 -413	177 -39.65	18.01 -2.34	2.116 1.39	0.526 1.7627	0.367 1.8
	0.4	166441 -20639	16664 -2062	1665 -204	167 -18.86	17.00 -0.186	2.021 1.67	0.523 1.86	0.373 1.877
	0.49	154017 -1999	15402 -198	1540 -18.024	154 -0.0165	15.77 1.78	1.907 1.96	0.521 1.98	0.382 1.98

Таблица 2.5.7
Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	254785 231487	25479 23151	2548 2317	255 234	25.9 25.67	2.97 4.837	0.677 2.75	0.447 2.545
	0.2	282118 383233	28212 38325	2822 3835	282 385	28.62 40.73	3.23 6.24	0.693 2.793	0.439 2.448
	0.3	287391 454467	28739 45449	2874 4547	288 457	29.14 47.7	3.27 6.83	0.686 2.74	0.427 2.333
	0.4	254090	25409	2541	254	25.79	2.92	0.638	0.41

		371169	37119	3714	373	39.27	5.86	2.523	2.19
	0.49	167036 56148	16703 5617	1670 563	167 58	17.074 7.63	2.04 2.577	0.537 2.07	0.387 2.021

Таблица 2.5.8

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	735855 -140620	73585 -14060	7359 -1404	736 -139	73 -12.34	7.701 0.308	1.079 1.574	0.416 1.70
	0.2	1387353 -154261	138735 -15424	13874 -1540	1388 -152	139 -13.67	14.22 0.21	1.73 1.599	0.48 1.74
	0.3	2141088 -126507	214109 -12649	21411 -1263	2141 -125	214 10.85	21.76 0.539	2.491 1.677	0.564 1.79
	0.4	2992034 -61022	299676 -6100	29968 -608	2997 -59	300 -4.22	30.324 1.27	3.353 1.817	0.656 1.872
	0.49	3850175 -2717	385018 -270	38502 -25.21	3850 -0.735	385 1.71	38.87 1.96	4.217 1.981	0.752 1.984

Табл. 2.5.5. Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, монотонно убывает с ростом ν и в основной и в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.7. С учетом тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным максимумом. Значения смещений возрастают на участке до ν=0.3 и затем убывают с ростом ν как в основной, так в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.6. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной в основной части трещины, уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений увеличиваются ростом ν.

Табл. 2.5.8. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным минимумом на участке АО. График функции монотонно убывает до ν=0.2 и затем увеличивается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.5-2.5.8 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ неравномерно сближаются и при максимальном взятом в расчетах значении E=10^{13} Па не совпадают, а для касательных смещений расходятся. При этом без

учета тяготения графики практически сходятся в точке ν=0.5 в зияющей части трещины, с учетом тяготения - в основной части трещины.

Распределение ГУ - "смещения - напряжения"
(на АО заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм, на ОВ заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа)

Таблица 2.5.9
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-68 1915	-4.84 192	1.50 20.37	2.14 3.15	2.2 1.43	2.21 1.26	2.21 1.24	
	0.2	-52 1883	-3.28 189	1.6 20.00	2.087 3.06	2.13 1.37	2.14 1.199	2.14 1.82	
	0.3	-34 1815	-1.53 182	1.71 19.25	2.04 2.92	2.07 1.29	2.077 1.127	2.077 1.111	
	0.4	-15 1711	0.28 172	1.85 18.12	2.01 2.73	2.02 1.19	2.024 1.039	2.024 1.024	
	0.49	0.423 1586	1.84 159	1.98 16.77	1.99 2.51	2.00 1.079	2.00 0.937	2.00 0.923	

Таблица 2.5.10
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	17 2228	3.73 223	2.38 22.85	2.24 2.8	2.23 0.798	2.221 0.579	2.23 0.578	
	0.2	19 2135	3.88 214	2.33 21.98	2.17 2.77	2.15 0.85	2.15 0.66	2.156 0.639	
	0.3	18 1994	3.73 200	2.25 20.64	2.10 2.7	2.08 0.907	2.088 0.728	2.087 0.71	
	0.4	13 1806	3.17 181	2.14 18.85	2.04 2.6	2.03 0.975	2.03 0.812	2.023 0.796	
	0.49	3.5 1596	2.15 160	2.01 16.85	2.00 2.49	2.00 1.054	2.00 0.91	2.00 0.896	

Таблица 2.5.11
Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-92 1825	-7.29 183	1.26 19.48	2.116 3.064	2.201 1.422	2.21 1.25	2.21 1.24	
	0.2	-98 1721	-7.88 173	1.14 18.4	2.04 2.9	2.13 1.35	2.14 1.197	2.142 1.182	
	0.3	-92 1618	-7.33 162	1.13 17.28	1.98 2.73	2.068 1.271	2.076 1.125	2.077 1.111	
	0.4	-64.63	-4.64	1.36	1.96	2.017	2.023	2.024	

		1548	155	16.5	2.57	1.177	1.037	1.023
	0.49	7.18 1561	1.08 156	1.908 16.53	1.99 2.48	1.999 1.077	1.994 0.937	2.00 0.922

Таблица 2.5.12

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	1.45 3414	2.15 342	2.22 34.7	2.23 3.99	2.228 0.917	2.28 0.61	2.28 0.579	
	0.2	2.25 4724	1.51 473	2.09 47	2.15 5.36	2.15 1.11	2.16 0.684	2.16 0.642	
	0.3	2.99 6203	1.58 620	2.037 62.73	2.08 6.91	2.087 1.33	2.088 0.77	2.088 0.714	
	0.4	3.19 7850	1.84 785	2.04 79.289	2.03 8.64	2.03 1.58	2.03 0.873	2.03 0.802	
	0.49	3.32 9476	2.13 948	2.014 96	2.00 10.37	2.00 1.84	2.00 0.989	2.00 0.904	

Табл. 2.5.9. Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является линейной, увеличивается с ростом ν в основной части трещины. В зияющей части является нелинейной, близкой к параболе, и уменьшается с ростом ν.

Табл. 2.5.11. С учетом тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, немонотонной, с одним локальным минимумом. Значения смещений в основной части уменьшаются на участке до ν=0.2 и затем увеличиваются с ростом ν. В зияющей части значения смещения монотонно убывают.

Табл. 2.5.10. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным максимумом на участке АО при ν=0.2. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений убывают с ростом ν.

Табл. 2.5.12. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным минимумом на участке АО. График функции монотонно убывает до ν=0.2 и затем увеличивается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.1-2.5.4 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$

сближаются и при $E \geq 10^{12}$ Па совпадают. При этом на участке основной части трещины графики стремятся пересечься в точке $\nu=0.5$.

Распределение ГУ - "напряжения - смещения"
(на АО заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа; на ОВ заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм)

Таблица 2.5.13
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	21220 4174	2122 418	213 44.24	21.64 6.694	2.54 2.94	0.634 2.56	0.443 2.53	0.424 2.522
	0.2	20432 3649	2043 367	204 38.88	20.84 6.057	2.45 2.77	0.615 2.446	0.431 2.41	0.413 2.41
	0.3	19180 2838	1918 286	192.2 30.64	19.578 5.13	2.32 2.57	0.59 2.31	0.417 2.29	0.400 2.29
	0.4	17456 1667	1746 169	174.94 18.79	17.84 3.82	2.13 2.318	0.559 2.168	0.401 2.15	0.385 2.15
	0.49	15488 197	1549 21.53	155 3.97	15.86 2.211	1.919 2.035	0.525 2.018	0.386 2.016	0.372 2.016

Таблица 2.5.14
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	18608 -7857	1861 -784	186 76.88	18.95 -6.14	2.203 0.928	0.529 1.636	0.361 1.707	0.344 1.714
	0.2	18312 -6106	1831 -609	183.47 59.33	18.66 -4.35	2.18 1.14	0.529 1.692	0.364 1.747	0.347 1.75
	0.3	17661 -4143	1766 -413	176.96 -39.65	18.01 2.34	2.116 1.39	0.526 1.76	0.367 1.80	0.351 1.8
	0.4	16644 -2062	1665 -204	166.79 -18.76	17.00 -186	2.021 1.672	0.523 1.858	0.373 1.876	0.358 1.878
	0.49	15402 -198	1540 -18.024	154.38 -0.0165	15.77 1.78	1.907 1.964	0.521 1.98	0.382 1.984	0.368 1.984

Таблица 2.5.15
Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	21646 6072	2165 609	216 63.22	22.069 8.59	2.587 3.129	0.638 2.583	0.444 2.528	0.424 2.523
	0.2	21210 7117	2121 714	212 73	21.62 9.52	2.532 3.121	0.623 2.481	0.432 2.417	0.413 2.41
	0.3	20136 7099	2014 712	201.75 73.25	20.53 9.38	2.412 2.997	0.599 2.358	0.418 2.29	0.4 2.288

	0.4	18251 5212	1825 523	183 54.25	18.63 7.36	2.209 2.672	0.567 2.204	0.402 2.157	0.386 2.152
	0.49	15609 739	1561 76	156 9.39	15.98 2.75	1.931 2.09	0.526 2.02	0.386 2.017	0.372 2.0161

Таблица 2.5.16

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	24106 -8478	2411 -846	241 -83	24.44 -6.76	2.753 0.866	0.584 1.629	0.367 1.706	0.345 1.713
	0.2	30355 7038	3036 -702	303 -69	30.7 -5.287	3.38 1.049	0.649 1.682	0.376 1.746	0.348 1.752
	0.3	37306 4994	3731 -498	373 -48.36	37.65 3.19	4.08 1.304	0.723 1.754	0.387 1.799	0.353 1.803
	0.4	44947 2466	4495 -245	450 -22.8	45.3 -0.589	4.85 1.632	0.806 1.854	0.401 1.876	0.361 1.878
	0.49	52364 -205	5237 -18.74	524 -0.088	53 1.777	5.603 1.964	0.89 1.982	0.419 1.984	0.372 1.984

Табл. 2.5.13. Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, уменьшается с ростом ν и в основной и в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.15. С учетом тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, немонотонной, с одним локальным максимумом. Значения смещений увеличиваются на участке до ν=0.3 и затем уменьшаются с ростом ν как в основной, так в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.14. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной в основной части трещины, уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений увеличиваются ростом ν.

Табл. 2.5.16. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является квазилинейной как в основной, так и в зияющей частях трещины. График функции монотонно убывает до ν=0.2 и затем увеличивается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.5-2.5.8 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ неравномерно сближаются и при максимальном взятом в расчетах значении

E=10^{13} Па не совпадают, а для касательных смещений расходятся. При этом на участке зияющей части трещины графики стремятся пересечься в точке ν=0.5.

В таблицах 2.5.17-2.5.20 и 2.5.25-2.5.28 представлены смещения при распределении ГУ "смещения-напряжения", в таблицах 2.5.21-2.5.24 и 2.5.29-2.5.32 - при распределении ГУ "напряжения-смещения". В таблицах 2.5.17-2.5.24 длина трещины равна 1 мм, в таблицах 2.5.25-2.5.32 равна 0.1 мм.

Распределение ГУ - "смещения - напряжения"
(на АО заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм, на ОВ заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа)

Таблица 2.5.17
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-4.84 192	1.505 20.379	2.14 3.154	2.204 1.431	2.21 1.259	2.210 1.241		
	0.2	-3.28 189	1.599 20.001	2.088 3.06	2.136 1.368	2.142 1.198	2.142 1.181		
	0.3	-1.536 182	1.716 19.252	2.041 2.92	2.073 1.29	2.077 1.127	2.077 1.110		
	0.4	0.287 172	1.850 18.124	2.007 2.73	2.02 1.193	2.023 1.039	2.024 1.023		
	0.49	1.842 159	1.984 16.774	1.998 2.506	1.999 1.079	2.00 0.936	2.00 0.922		

Таблица 2.5.18
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	3.73 223	2.378 22.85	2.24 2.803	2.23 0.798	2.228 0.598	2.228 0.578		
	0.2	3.88 214	2.329 21.98	2.173 2.772	2.158 0.85	2.156 0.6585	2.156 0.639		
	0.3	3.73 200	2.253 20.646	2.104 2.702	2.089 0.907	2.087 0.728	2.087 0.710		
	0.4	3.168 181	2.144 18.849	2.041 2.59	2.031 0.97	2.03 0.812	2.029 0.796		
	0.49	2.151 160	2.016 16.848	2.002 2.49	2.0008 1.054	2.0007 0.9105	2.00 0.896		

Таблица 2.5.19

Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	-5.088 191	1.481 20.29	2.138 3.145	2.203 1.430	2.210 1.259	2.210 1.241		
	0.2	-3.744 187	1.553 19.839	2.038 3.046	2.136 1.376	2.141 1.198	2.142 1.181		
	0.3	-2.117 180	1.658 19.056	2.035 2.903	2.037 1.288	2.077 1.127	2.077 1.110		
	0.4	-0.206 170	1.801 17.962	2.001 2.715	2.021 1.191	2.023 1.038	2.024 1.023		
	0.49	1.766 159.2	1.976 16.749	1.997 2.504	1.999 1.079	2.00 0.936	2.00 0.922		

Таблица 2.5.20

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	3.574 235	2.363 24.039	2.241 2.922	2.229 0.810	2.228 0.599	2.228 0.578		
	0.2	3.648 239	2.305 24.573	2.171 3.030	2.151 0.876	2.156 0.661	2.156 0.639		
	0.3	3.522 242	2.231 24.855	2.102 3.122	2.089 0.949	2.087 0.73	2.087 0.710		
	0.4	3.066 241	2.133 24.893	2.040 3.204	3.030 1.035	2.03 0.818	2.029 0.796		
	0.49	2.149 239	2.015 24.729	2.002 3.278	2.00 1.132	2.00 0.918	2.00 0.896		

Табл. 2.5.17. Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является линейной, увеличивается с ростом ν в основной части трещины. В зияющей части является нелинейной, близкой к параболе, и уменьшается с ростом ν.

Табл. 2.5.19. С учетом тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является квазилинейной в основной части трещины: значения смещений увеличиваются с ростом ν. На участке зияющей части трещины значения смещений монотонно убывают.

Табл. 2.5.18. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным максимумом на участке АО при ν=0.2. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений убывают с ростом ν.

Табл. 2.5.20. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным минимумом на участке АО. График функции монотонно убывает до ν=0.2 и затем увеличивается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.17-2.5.20 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ сближаются и при $E>10^{10}$ Па практически совпадают. При этом в основной части трещины графики практически сходятся в точке ν=0.5.

Распределение ГУ - "напряжения - смещения"
(на АО заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа; на ОВ заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм)

Таблица 2.5.21
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	2122 419	212 44.244	21.642 6.694	2.544 2.939	0.634 2.563	0.443 2.526	0.424 2.522	0.422 2.522
	0.2	2043 367	204 38.880	20.843 6.056	2.454 2.774	0.615 2.446	0.431 2.413	0.412 2.410	0.411 2.409
	0.3	1918 285	192 30.6437	19.578 5.122	2.316 2.570	0.590 2.315	0.417 2.290	0.400 2.287	0.398 2.287
	0.4	1745 168	174 18.797	17.840 3.816	2.129 2.318	0.558 2.168	0.401 2.153	0.385 2.151	0.384 2.151
	0.49	1549 21.531	155 3.967	15.857 2.211	1.918 2.035	0.525 2.017	0.385 2.016	0.371 2.016	0.370 2.016

Таблица 2.5.22
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	1861 -184	186 -76	18.951 -6.145	2.203 0.928	0.528 1.635	0.361 1.706	0.344 1.713	0.342 1.714
	0.2	1832 -609	183 -59	18.658 -4.355	2.176 1.142	0.528 1.691	0.363 1.746	0.347 1.755	0.345 1.752
	0.3	1766 -412	176 -39.65	18.011 -2.341	2.115 1.389	0.526 1.762	0.367 1.800	0.351 1.803	0.349 1.804
	0.4	1664 -204	166 -8.763	17.0 -0.185	2.020 1.672	0.522 1.857	0.373 1.876	0.358 1.878	0.356 1.878
	0.49	1540 -8.024	154 -0.016	15.768 1.784	1.907 1.964	0.520 1.982	0.382 1.984	0.368 1.984	0.367 1.984

Таблица 2.5.23

Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	2126 438	213 46.142	21.685 6.884	2.548 2.958	0.634 2.565	0.443 2.526	0.424 2.522	0.422 2.522
	0.2	2051 401	205 42.347	20.921 6.403	2.461 2.809	0.615 2.449	0.431 2.413	0.412 2.410	0.411 2.409
	0.3	1927 328	193 34.904	19.634 5.548	2.325 1.381	0.591 2.319	0.417 2.290	0.400 2.287	0.398 2.287
	0.4	1753 204	175 22.342	17.919 4.170	2.137 2.353	0.559 2.171	0.401 2.153	0.385 2.151	0.384 2.151
	0.49	1550 26.951	155 4.5095	15.870 2.2653	1.920 2.040	0.525 2.018	0.385 2.016	0.371 2.016	0.370 2.016

Таблица 2.5.24

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	1916 -790	191 -77	19.501 -6.207	2.258 0.922	0.534 1.635	0.361 1.706	0.344 1.713	0.342 1.714
	0.2	1952 -618	195 -60	19.862 -4.448	2.297 1.132	0.540 1.690	0.365 1.746	0.347 1.755	0.345 1.752
	0.3	1962 -421	196 -0.501	19.975 -2.426	2.312 2.613	0.545 1.761	0.369 1.799	0.351 1.803	0.349 1.804
	0.4	1947 -208	195 -9.167	19.830 -0.226	2.303 1.668	0.551 1.857	0.375 1.876	0.358 1.878	0.356 1.878
	0.49	1910 -18.096	191 -0.023	19.465 1.7836	2.277 1.964	0.557 1.950	0.386 1.984	0.368 1.984	0.367 1.984

Табл. 2.5.21(23). Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, уменьшается с ростом ν и в основной и в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.22. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной в основной части трещины, уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений увеличиваются ростом ν.

Табл. 2.5.24. Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, с одним локальным максимумом на участке АО. График функции монотонно возрастает до ν=0.3 и затем уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной и возрастает сростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.5-2.5.8 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ неравномерно сближаются и при максимальном взятом в расчетах значении $E=10^{13}$ Па практически совпадают. При этом в зияющей части трещины графики практически сходятся в точке $\nu=0.5$.

Распределение ГУ - "смещения - напряжения"
(на АО заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм; на ОВ заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа)

Таблица 2.5.25
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	1.505 20.379	2.140 3.153	2.203 1.431	2.210 1.259	2.210 1.241	2.211 1.240		
	0.2	1.599 20.00	2.087 3.062	2.136 1.368	2.141 1.198	2.142 1.181	2.142 1.180		
	0.3	1.716 19.25	2.041 2.923	2.073 1.290	2.077 1.127	2.087 1.110	2.077 1.109		
	0.4	1.850 18.12	2.006 2.732	2.022 1.192	2.023 1.039	2.024 1.023	2.024 1.022		
	0.49	1.984 16.774	1.998 2.506	1.999 1.079	2.000 0.936	2.000 0.922	2.000 0.921		

Таблица 2.5.26
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	2.378 22.85	2.243 2.803	2.230 0.798	2.228 0.598	2.228 0.578	2.228 0.576		
	0.2	2.329 21.98	2.173 2.771	2.157 0.850	2.156 0.658	2.156 0.639	2.156 0.637		
	0.3	2.253 20.64	2.104 2.702	2.089 0.907	2.087 0.728	2.077 0.710	2.087 0.708		
	0.4	2.144 18.84	2.041 2.599	2.0315 0.975	2.030 0.812	2.029 0.796	2.029 0.794		
	0.49	2.016 16.84	2.002 2.49	2.000 1.054	2.000 0.910	2.000 0.896	2.000 0.894		

Таблица 2.5.27

Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	1.503 20.37	2.140 3.153	2.203 1.431	2.210 1.259	2.210 1.241	2.211 1.240		
	0.2	1.594 19.98	2.087 3.060	2.136 1.368	2.141 1.198	2.142 1.181	2.142 1.180		
	0.3	1.710 19.233	2.040 2.921	2.073 1.290	2.077 1.127	2.077 1.110	2.077 1.109		
	0.4	1.845 18.108	2.006 2.730	2.022 1.192	2.023 1.038	2.024 1.023	2.024 1.022		
	0.49	1.983 16.771	1.998 2.506	1.999 1.079	2.000 1.936	2.000 0.925	2.000 0.921		

Таблица 2.5.28

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	2.377 22.97	2.243 2.815	2.23 0.799	2.228 0.598	2.228 0.578	2.228 0.576		
	0.2	2.326 22.224	2.173 2.797	2.157 0.853	2.156 0.658	2.1565 0.639	2.156 0.637		
	0.3	2.250 21.067	2.104 2.744	2.089 0.911	2.087 0.728	2.077 0.710	2.087 0.708		
	0.4	2.142 19.453	2.041 2.660	2.031 0.981	2.030 0.813	2.029 0.796	2.029 0.794		
	0.49	2.015 17.636	2.002 2.568	2.000 1.062	2.000 0.911	2.000 0.896	2.000 0.894		

Табл. 2.5.25(27). Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является квазилинейной, увеличивается при $E>10^6$ с ростом ν и уменьшается при больших значениях E в основной части трещины.

Табл. 2.5.26(28). Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной, уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является нелинейной, близкой к параболе, значения касательных смещений убывают с ростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.25-2.5.28 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ сближаются и при $E>10^7$ Па графики практически совпадают. При этом в основной части трещины графики практически сходятся в точке $\nu=0.5$.

Распределение ГУ - "напряжения - смещения"
(на АО заданы напряжения σ_n, σ_s=1 МПа; на ОВ заданы смещения u_n,u_s= 1 мкм)

Таблица 2.5.29
Нормальные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	212 44.244	21.642 6.694	2.544 2.939	0.634 2.563	0.443 2.526	0.424 2.522	0.422 2.522	
	0.2	204 38.880	20.843 6.057	2.454 2.774	0.615 2.446	0.431 2.413	0.412 2.410	0.411 2.409	
	0.3	192 30.643	19.578 5.123	2.316 2.570	0.590 2.315	0.417 2.29	0.400 2.287	0.398 2.287	
	0.4	174 18.797	18.84 3.816	2.129 2.318	0.558 2.168	0.401 2.153	0.385 2.151	0.384 2.151	
	0.49	155 3.967	15.857 2.211	1.918 2.035	0.525 2.018	0.385 2.016	0.371 2.016	0.370 2.016	

Таблица 2.5.30
Касательные смещения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	186 -76	18.951 -6.145	2.939 0.928	0.528 1.635	0.361 1.706	0.344 1.713	0.342 1.714	
	0.2	183 -59	18.658 -4.355	2.176 1.142	0.528 1.691	0.363 1.746	0.347 1.752	0.345 1.752	
	0.3	176 -39.65	18.011 -2.341	2.115 1.389	0.526 1.762	0.367 1.8	0.351 1.803	0.349 1.804	
	0.4	166 -18.763	17.000 -0.185	2.020 1.672	0.522 1.857	0.373 1.876	0.358 1.878	0.356 1.878	
	0.49	154 -0.016	15.768 1.784	1.907 1.964	0.520 1.982	0.382 1.984	0.368 1.984	0.367 1.984	

Таблица 2.5.31
Нормальные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	212 44.434	21.646 6.713	2.544 2.941	0.634 2.563	0.443 2.526	0.424 2.522	0.422 2.522	
	0.2	204 39.226	20.850 6.091	2.454 2.778	0.615 2.446	0.431 2.413	0.412 2.410	0.411 2.409	
	0.3	192 31.069	19.587 5.1654	2.317 2.575	0.590 2.315	0.417 2.29	0.400 2.287	0.398 2.287	
	0.4	175 19.151	17.848 3.851	2.130 2.321	0.558 2.168	0.401 2.153	0.385 2.151	0.384 2.151	
	0.49	155 4.021	15.859 2.216	1.919 2.036	0.525 2.018	0.385 2.016	0.371 2.016	0.370 2.016	

Таблица 2.5.32

Касательные смещения с учетом сил тяготения [мкм]

		Модуль Юнга, Па							
Коэффициент Пуассона		10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
	0.1	186 -76	19.00 -6.151	2.209 0.927	0.529 1.635	0.361 1.706	0.344 1.713	0.342 1.714	
	0.2	184 -59	18.778 -4.364	2.188 1.411	0.529 1.691	0.363 1.746	0.347 1.752	0.345 1.752	
	0.3	178 -39.73	18.207 -2.349	2.135 1.388	0.529 0.762	0.367 1.8	0.351 1.803	0.349 1.804	
	0.4	169 -8.803	17.283 -0.189	2.049 1.672	0.525 1.857	0.373 1.876	0.358 1.878	0.356 1.878	
	0.49	158.08 -0.017	16.138 1.7842	1.944 1.964	0.524 1.982	0.382 1.984	0.368 1.984	0.367 1.984	

Табл. 2.5.29(31). Без учета тяготения зависимость $D_n = D_n(\nu)$ является нелинейной, близкой к параболе, уменьшается с ростом ν и в основной и в зияющей частях трещины.

Табл. 2.5.30(32). Зависимость $D_s = D_s(\nu)$ является нелинейной в основной части трещины, уменьшается с ростом ν. Для зияющей части трещины зависимость является квазилинейной: значения касательных смещений увеличиваются ростом ν.

В целом, и для нормальных и для касательных смещений согласно табл. 2.5.29-2.5.32 с увеличением значений модуля Юнга кривые $D_n = D_n(\nu)$ и $D_s = D_s(\nu)$ сближаются и при $E>10^{12}$ Па графики практически совпадают. При этом в зияющей части трещины графики практически сходятся в точке $\nu=0.5$.

На основе представленных выше результатов сделаны следующие выводы:

А. Величины нормальных смещений на берегах трещины монотонно уменьшаются с увеличением модуля Юнга и коэффициента Пуассона вне зависимости от учета тяготения, что свидетельствует о том, что более упругий материал сильнее сопротивляется нагрузке и с уменьшением длины трещины она не раскрывается даже при малых значениях модуля Юнга (например, для трещины с длиной основной части менее 1 мм).

Б. Величины касательных смещений на берегах трещины с увеличением модуля Юнга и коэффициента Пуассона в расчетах без учета тяготения монотонно уменьшаются. С учетом тяготения направление изменений функции касательных смещений как убывают, так и возрастают.

В. Для трещин в практически несжимаемых упругих телах ($\nu \to 0.5$) функции нормальных смещений сходятся в основной части трещины при распределении ГУ "смещения + напряжения", в зияющей части трещины - при распределении ГУ "напряжения + смещения".

Г. Влияние сил тяготения на функцию нормальных смещений берегов трещины проявляется в том, что при средних значениях коэффициента Пуассона имеет экстремум. В итоге формируется параболический профиль кривой, который с возрастанием значений модуля Юнга стремится к квазилинейному виду.

Д. Без учета тяготения по всей длине трещины и нормальные и касательные смещения нелинейно зависят от модуля Юнга и коэффициента Пуассона, уменьшаются с одновременным ростом ν и E. С учетом тяготения и нормальные и касательные смещения нелинейно зависят от модуля Юнга и коэффициента Пуассона, без четкой функциональной зависимости.

2.6 Выводы ко второй главе

Рассмотрены типы постановки краевых задач теории трещин с СКУ и выделены субкомбинации оригинальных ГУ, которые физически допустимы в постановке. Приведен алгоритм численно-аналитического решения краевых задач теории трещин со смешанными ГУ. Проведен анализ идентичности распределений разрывов смещений на примере трещины в песчанике. Проведен качественный анализ решений краевых задач, полученных в широком диапазоне значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона, и сделаны выводы относительно поведения функций нормальных и касательных смещений берегов трещины.

ГЛАВА 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСКРЫТИЯ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН СМЕШАННОГО ТИПА В ГЕОМАТЕРИАЛАХ

3.1. Аппроксимация раскрытий зияющей части трещины, вычисление коэффициентов интенсивности напряжений и сравнение результатов вычислительного эксперимента с аналитическими решениями Г.П.Черепанова

При решении краевых задач для трещин смешанного типа, представленных в этой главе, используются исходные данные п.2.4. Поскольку для трещин отрыва из [97] известно аналитическое решение задачи для субкомбинации 1а таблицы 2.1 в виде

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{-4u_n^0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{L-x}}\right)\right], \tag{3.1}$$

то в дальнейшем будем именовать его аналитическим решением Черепанова.

Используя формулу (1.84), нетрудно получить аналитическое выражение для КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(1)} = \frac{\sqrt{2}Gu_n^0}{\sqrt{\pi L}(1-\nu)}, \tag{3.2}$$

Результаты ВЭ для субкомбинации 1а представлены в работах [54,55,58]. В таблице 3.1 представлены численные значения (3.1).

Таблица 3.1

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 1а)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	-1.978	-1.725	-1.54	-1.379	-1.226	-1.081	-0.931	-0.769	-0.585	-0.332

На Рис.3.1 представлены графики функции $|D_n(x)|$ (решение Черепанова и численное решение МРС для субкомбинации 1а), а на Рис.3.2 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

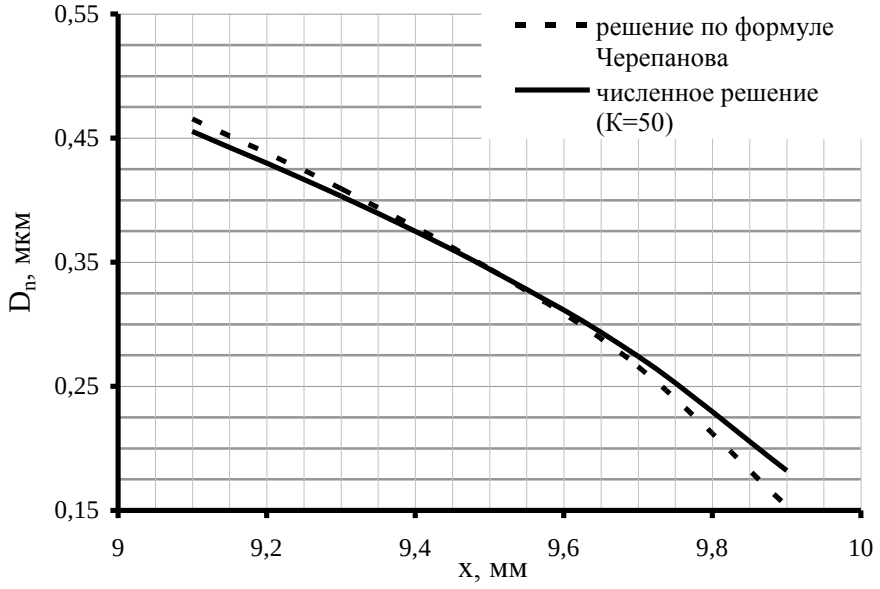


Рис.3.1 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

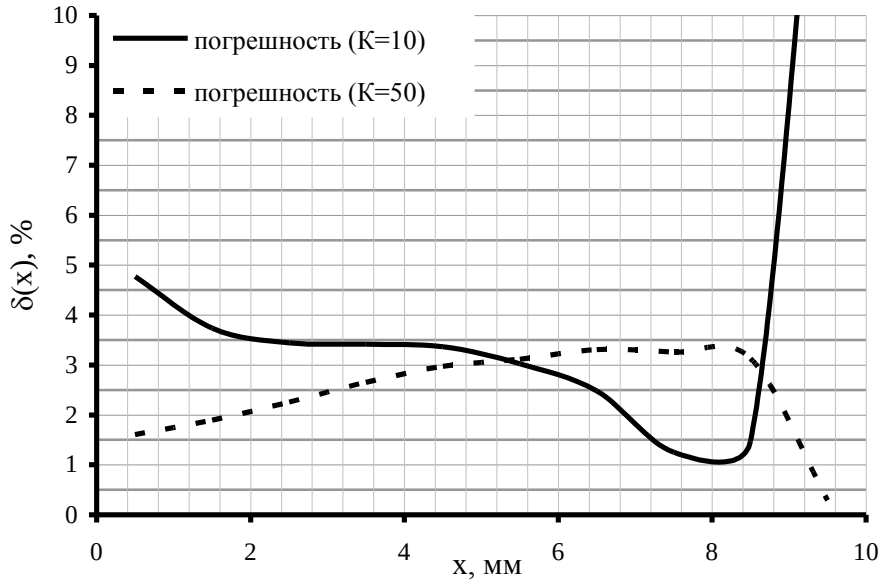


Рис.3.2 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.2 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 16.8% , а при $K = 50$ - значения 3.3%. При этом численные решения МРС стремятся к значениям аналитического решения Черепанова. В рамках ВЭ варьировалась длина основной трещины. Исходя из анализа полученных данных при разных значениях длины установлено, что влияние длины основной трещины b на распределение нормальных раскрытий ничтожно ма-

ло при $b \geq 10L_0$ [60]. Таким образом, в дальнейших ВЭ можно ограничиться условием

$$b \leq 10L_0. \tag{3.3}$$

В §2.4 установлено, что в таблице 2.2 существует идентичность между нормальными смещениями для комбинации №1 и сдвиговыми для комбинации №4. Результаты, приведенные в таблице 2.2 показывают, что касательные смещения совпадают по величине и знаку с нормальными во всех точках на берегах трещины с погрешностью $r = 0.001\%$. При погрешности расчетов 30% субкомбинация 1а имеет уже 21 аналогичную субкомбинацию для зияющей части трещины. Из установленной идентичности в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать аналогично (3.1) в виде

$$D_s^{(1)}(x) = \frac{u_s^0}{u_n^0} D_n^{(1)}(x). \tag{3.4}$$

Результаты ВЭ для субкомбинации 4а (таблица 2.1) представлены в работе [58]. Тогда по формуле (1.85) КИН 2-го рода аналогично (3.2) запишется как

$$K_{II}^{(1)} = \frac{u_s^0}{u_n^0} K_I^{(1)}. \tag{3.5}$$

Постановка задачи с граничными условиями комбинации №3 в условиях сжатия берегов трещины

$$u_n^0 = -U_0, \ \sigma_n^0 = \sigma_0 \tag{3.6}$$

и ее решение рассмотрено в работах [54,59]. Решение подобной задачи имеется в [97] и представлено в виде суммы

$$D_n^{(2)}(x) = D_n^{(1)}(x) + D_n^{(\sigma)}(x), \tag{3.7}$$

$$D_n^{(\sigma)}(x) = \frac{2(1-\nu)\sigma_n^0}{G} \sqrt{x(L-x)}. \tag{3.8}$$

Численные значения (3.7) представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 3а, $\sigma_n^0 > 0$)

x, мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n, мкм	-2.029	-1.749	-1.547	-1.375	-1.216	-1.063	-0.909	-0.747	-0.564	-0.318

На Рис.3.3 и Рис.3.4 представлены графики функции $|D_n(x)|$ подобно Рис.3.1 и Рис.3.2 для субкомбинации 3а.

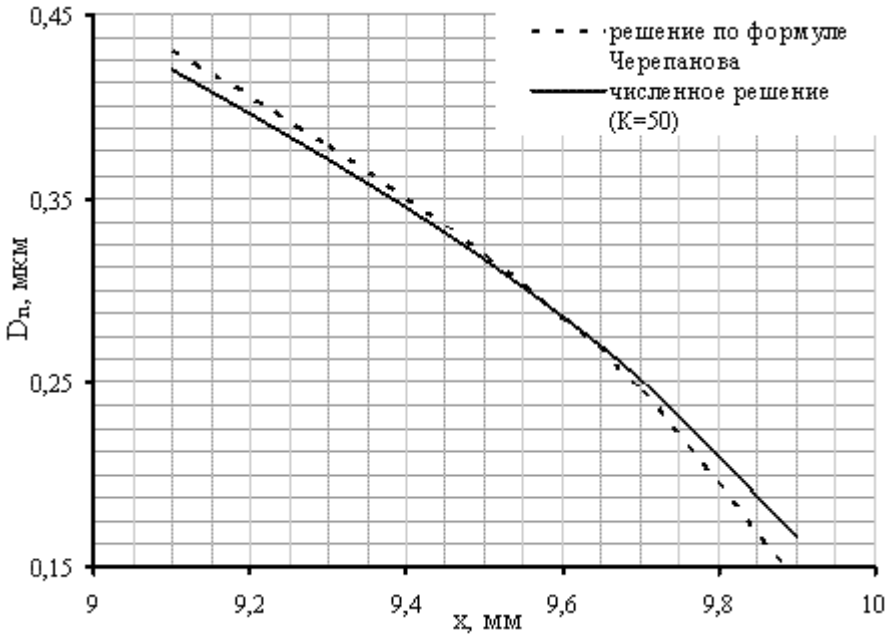


Рис.3.3 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

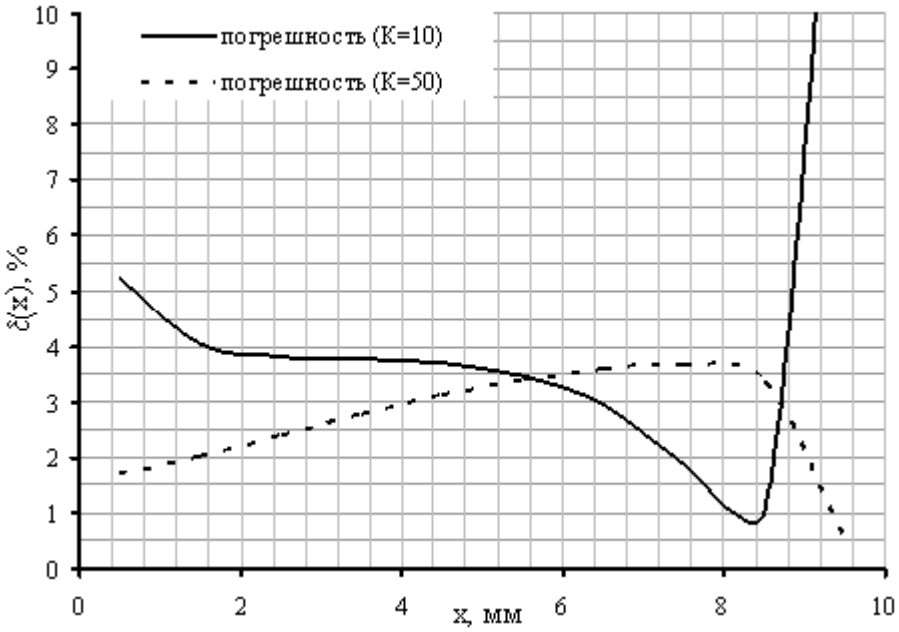


Рис.3.4 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.4 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 16.4% , а при $K = 50$ - значения 3.7%. При этом численные решения МРС при $K = 50$ стремятся к значениям аналитического решения Черепанова, а при $K = 10$ - расходятся вблизи вершины трещины.

По формуле (1.84) и КИН 1-го рода (3.2). При вычислении предела получим выражение КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(2)} = K_I^{(1)} - q_n,\ q_n = \sqrt{\frac{\pi L}{2}}\sigma_n^0. \tag{3.9}$$

В таблице 2.2 установлена идентичность между нормальными смещениями для субкомбинации 3а и сдвиговыми для субкомбинации 6а. Согласно полученным данным нормальные раскрытия совпадают по величине и знаку с касательными во всех точках на берегах трещины с погрешностью $r = 0.001\%$. При погрешности расчетов 30% для субкомбинации 3а имеется 15 идентичность субкомбинаций на зияющей части трещины.

Из установленной идентичности в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать аналогично (3.7), т.е.

$$D_s^{(2)}(x) = D_s^{(1)}(x) + D_s^{(\sigma)}(x) \tag{3.10}$$

$$D_s^{(\sigma)}(x) = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} D_n^{(\sigma)}(x). \tag{3.11}$$

Результаты ВЭ для субкомбинации 6а представлены в работе [59]. Обращаясь к формуле (1.85), КИН 2-го рода аналогично (3.2) запишется как

$$K_{II}^{(2)} = K_{II}^{(1)} - q_s,\ q_s = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} q_n. \tag{3.12}$$

Постановка задачи с граничными условиями комбинации №3 в условиях растяжения берегов трещины

$$u_n^0 = -U_0,\ \sigma_n^0 = -\sigma_0 \tag{3.13}$$

и ее решение рассмотрено в работе [74]. В работе [97] приведено решение подобной задачи, где нормальное раскрытие зияющей трещины в аналитическом виде определено формулой (3.7). В таблице 3.4 представлены численные значения D_n аналитического решения Черепанова [74].

Таблица 3.3

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 3а, $\sigma_n^0 < 0$)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	-2.081	-1.835	-1.652	-1.491	-1.337	-1.184	-1.025	-0.852	-0.651	-0.371

На Рис.3.5 и Рис.3.6 представлены графики функции $|D_n(x)|$ для субкомбинации 3а. Поведение кривых аналогично показанным на Рис.3.3-3.4.

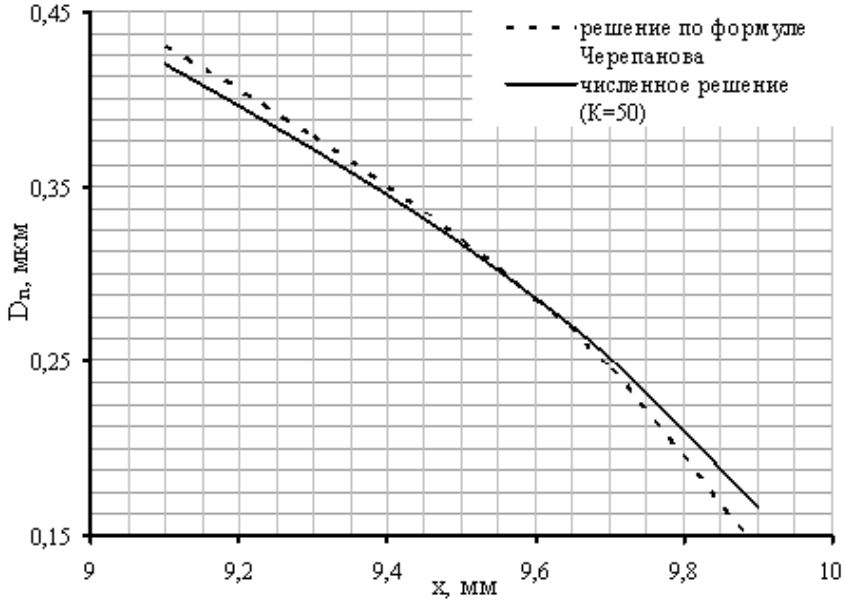


Рис.3.5 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

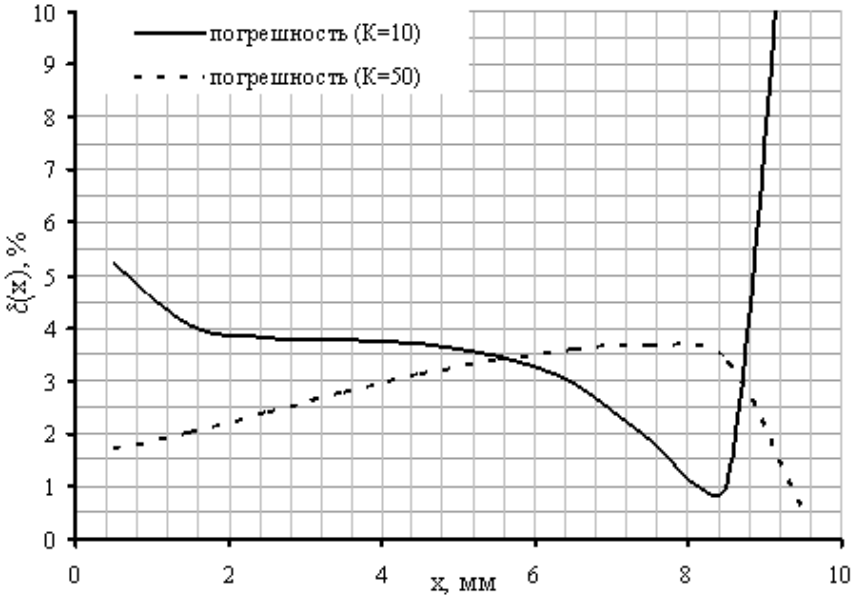


Рис.3.6 Относительная погрешность решений (g=0)

Характер поведения нормальных разрывов, полученных по аналитической формуле Черепанова и с помощью МРС (Рис.3.1, Рис.3.3 и Рис.3.5) характеризует полное совпадение решений на расстоянии 0.02L-0.04L от вершины трещины и образование перекрещивающихся гладких кривых.

По аналогии с (3.9) смена знака напряжения приводит к выражению

$$K_I^{(3)} = K_I^{(1)} + q_n . \qquad (3.14)$$

На Рис.3.7 представлены графики КИН как функции нормальных смещений и нормальных напряжений, полученных из (3.2) (линия «а»), (3.9) (линия «б») и (3.14) (линия «в») для трещины в песчанике, имеющего критические КИН

$$K_{Ic} = 2.15 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^{3/2}, \quad K_{IIc} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^{3/2}. \qquad (3.15)$$

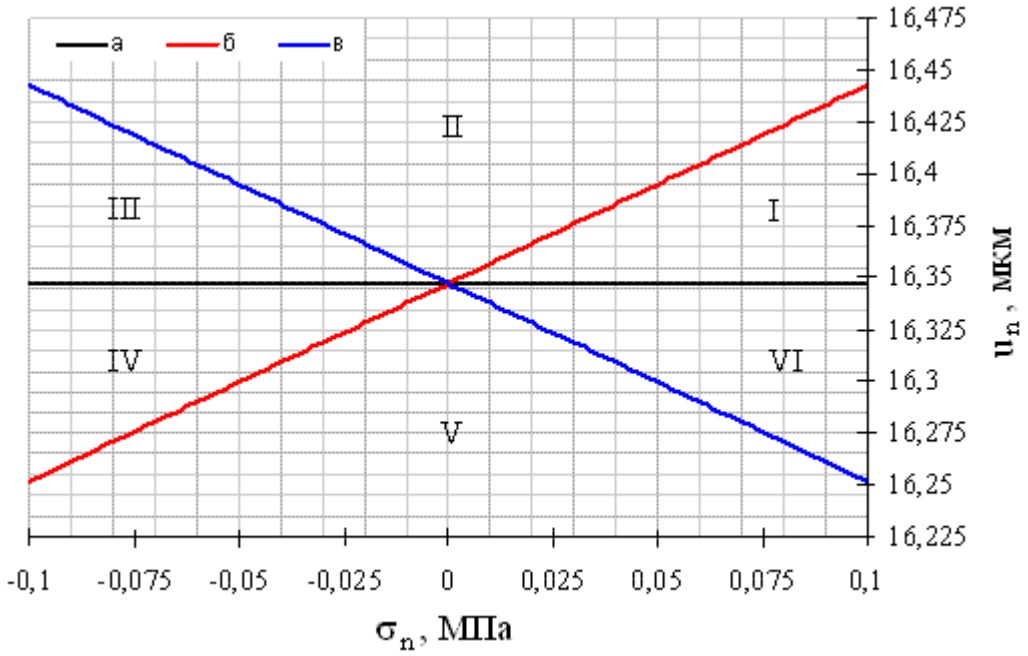


Рис.3.7 График функций $u_n = f(\sigma_n, K_{Ic})$.

Критическим при $K_I^{(1)} = K_{Ic}$ является смещение величиной 16.345 мкм (точка пересечения всех линий на Рис.3.7), которое не зависит от величины напряжения. Зоны развития трещины находятся в секторах I-III, зоны стагнации – в остальных. Областью критических смещений на линии уровня $K_I^{(2)} = K_{Ic}$ является наклонная прямая «б», разделяющая зоны развития (II-IV) и зоны стагнации (I,V,VI) на две полуплоскости. Областью критических смещений при $K_I^{(2)} = K_{Ic}$ является наклонная прямая «в», разделяющая зоны развития (I,II,VI) и зоны стагнации (III-V) также на две полуплоскости. Общей зоной развития для всех является зона II, а зоной стагнации – зона V.

3.2 Модель развития трещины отрыва с различной длиной основной и зияющей частей трещины и переменной длиной всей трещины

Рассмотрим модель развития трещины отрыва в сплошном геоматериале, допуская изменения длин основной и зияющей частей, длины всей трещины (Рис.2.2). Допустим также, что трещина имеет габариты мелкой трещины (см. Табл. 1).

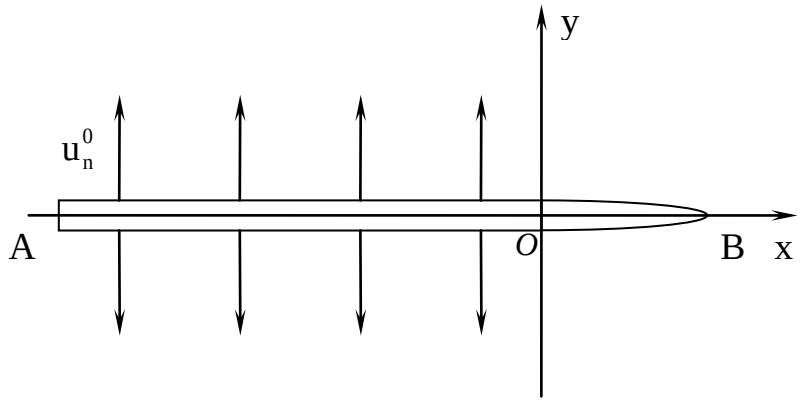


Рис.3.8 Геометрическая модель трещины отрыва для субкомбинации 1а.

Исходя из результатов ВЭ для субкомбинации 1а получена функциональная зависимость нормального раскрытия зияющей трещины [60]

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) f_1(b, L, \zeta, \varpi), \tag{3.16}$$

$$f_1(b, L, \zeta, \varpi) = 1 - \zeta e^{-\frac{\varpi b}{L}}. \tag{3.17}$$

Результаты ВЭ для субкомбинации 1а представлены в работах [54,55,58]. В таблице 3.4 приведены численные значения D_n, вычисленные по формуле (3.13), в вариантах: 1) $b=5L_0$ (L_0=10 мм); 2) $b=3L_0$ (L_0=50 мм). Аппроксимирующие коэффициенты равны $\zeta = 0.3808$ и $\varpi = 0.4631$ [60].

Таблица 3.4

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 1а)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм										
Вар.1	-1.937	-1.698	-1.511	-1.349	-1.199	-1.055	-0.91	-0.759	-0.592	-0.386
Вар.2	-1.912	-1.664	-1.472	-1.308	-1.157	-1.014	-0.871	-0.724	-0.563	-0.366

На Рис.3.9 и Рис.3.10 приведены графики функции $|D_n(x)|$ зияющей части трещины вблизи вершины.

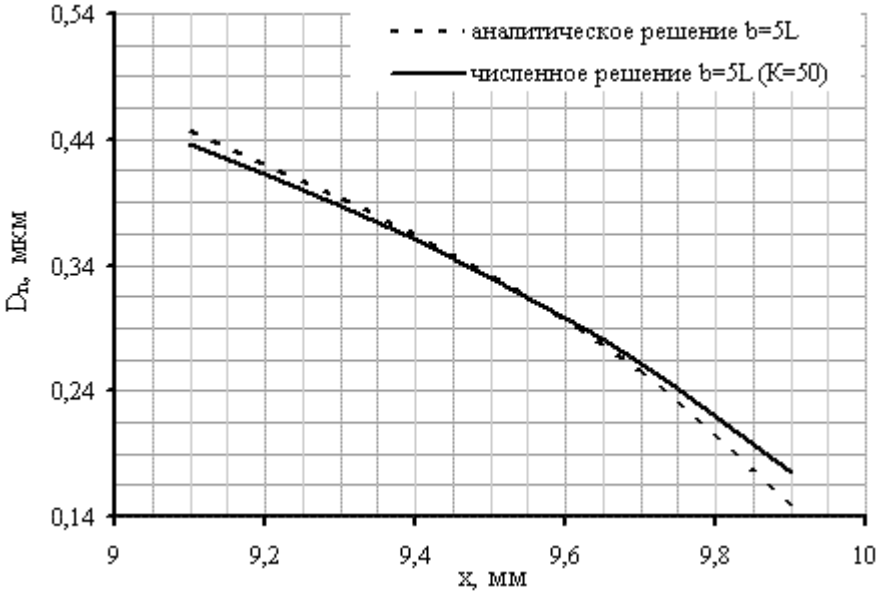


Рис.3.9 Нормальное раскрытие зияющей части трещины $b=5L_0$ (L_0=10 мм)

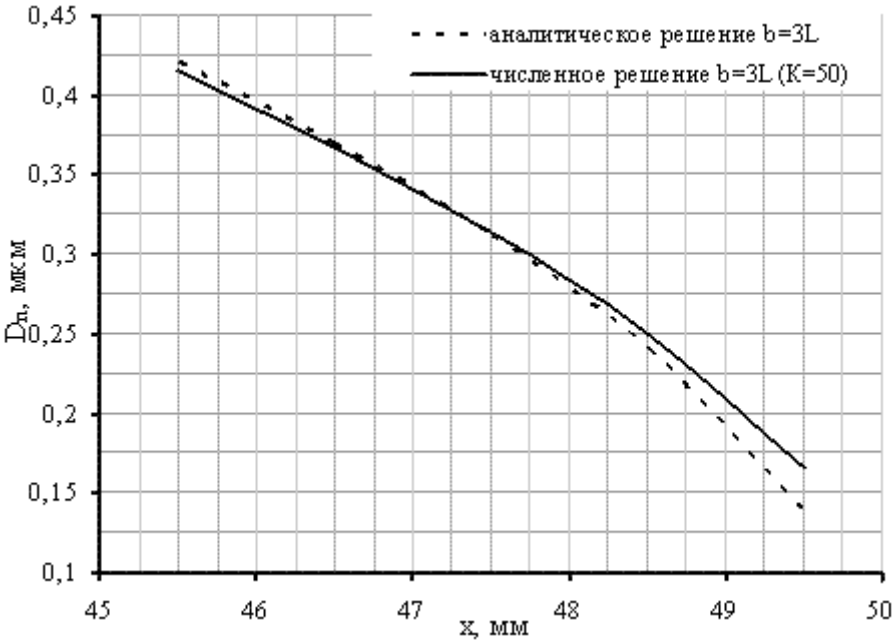


Рис.3.10 Нормальное раскрытие зияющей части трещины $b=3L_0$ (L_0=50 мм)

На Рис.3.11 представлен график относительной погрешности численных решений при К =10 и К=50.

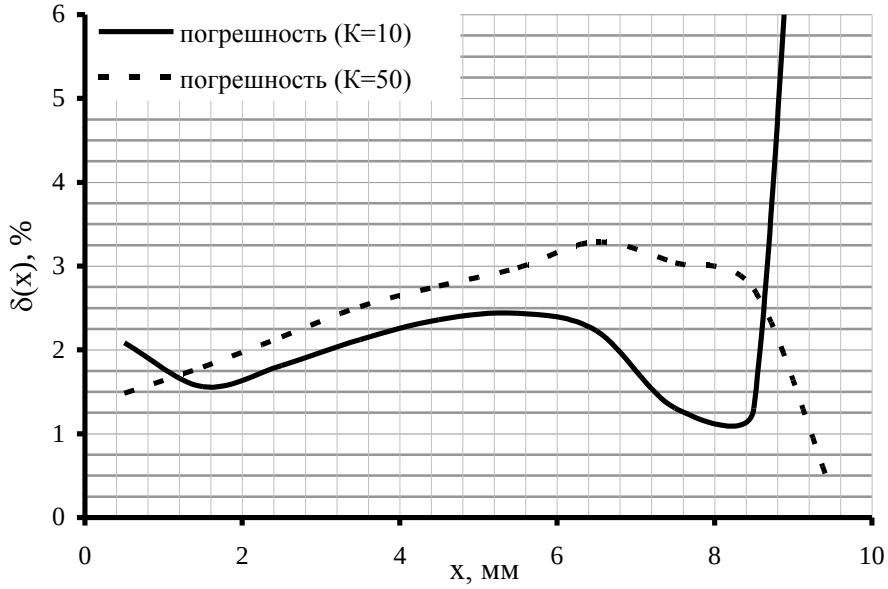


Рис.3.11 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.11 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 16.4%, а при $K = 50$ - значения 3.3%. При этом численные решения МРС при $K = 50$ стремятся к значениям аналитического решения Черепанова, а при $K = 10$ - расходятся вблизи вершины трещины.

На основании проведенного исследования был установлен КИН 1-го рода в виде, аналогичном (3.16), т.е.

$$K_I = K_I^{(1)} f_1(b, L, \zeta, \varpi). \tag{3.18}$$

Обращаясь к (3.2), перепишем (3.18) его в виде

$$K_I^{(1)} = \frac{\alpha u_n^0}{\sqrt{L}} f_1(b, L, \zeta, \varpi), \ \alpha = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{\pi}(1-\nu)}. \tag{3.19}$$

При критическом значении КИН 1-го рода приходим к уравнению

$$\frac{K_{Ic}}{\alpha u_n^0} \sqrt{L} = f_1(b, L, \zeta, \varpi), \tag{3.20}$$

которое позволяет установить границу произвольных соотношений между длинами основной (b) и зияющей (L) частей трещины, включая условие (3.3) на уровне критических значений КИН. Решение (3.20) относительно переменной L имеет вид

$$b(L) = -\frac{L}{\varpi}\ln\left(\frac{\alpha u_n^0 - K_{Ic}\sqrt{L}}{\alpha\zeta u_n^0}\right). \tag{3.21}$$

Поскольку $b > 0$, то выражение под знаком логарифма должно быть меньше единицы. Отсюда получаем неравенство

$$u_n^0 < \frac{K_{Ic}\sqrt{L}}{(1-\zeta)\alpha}, \tag{3.22}$$

выполнение которого гарантирует положительную длину основной части трещины. Одновременно учитывая (3.3) и (3.22), при построении функции (3.21) получаем границу раздела зон развития и стагнации трещины. В тех случаях, когда положительные значения b сосредоточены в многосвязной области, подбор коэффициентов аппроксимации ζ и ϖ позволяет подобрать аппроксимирующую зависимость, при которой должно выполняться определенное соотношение между длинами основной и зияющей частей трещины.

3.3 Модель развития трещины в трещиноватом массиве при постоянной сумме длин зияющей части и расстояния до наклонной трещины

Рассмотрим модель развития трещины отрыва в нарушенном геоматериале при постоянной сумме длин зияющей части OB и расстояния $d = BH$ до наклонной трещины A′B′ (Рис.2.2 и 3.12).

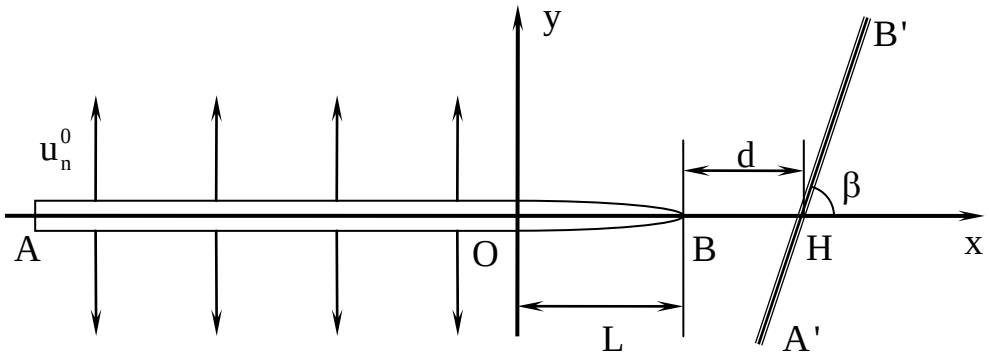


Рис.3.12 Геометрическая модель трещины в трещиноватом массиве

В отличие от §3.2 введем условие [55,57,77,79]

$$L + d = \text{const}. \tag{3.23}$$

Из краевой задачи при фиксированных углах наклона $\beta = 30^0, 45^0, 60^0$ к оси абсцисс аппроксимирующая зависимость нормального смещения зияющей части трещины OB имеет вид

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) f_2(d, L), \tag{3.24}$$

Представим аппроксимацию в виде

$$f_2(d, L) = 1 - \phi(d, L) \cdot \exp\left\{-\psi(d, L)\frac{d}{L}\right\}, \tag{3.25}$$

причем аппроксимирующая функция образует поверхность, для всех точек которой выполняется условие (3.23). Исходя из результатов ВЭ, составим матрицу значений неизвестных коэффициентов аппроксимации в (3.25) функций при указанных выше значениях углов наклона (по строкам) и $\text{const} = \{9,12,16\}$ см (по столбцам):

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 0.128 & 0.146 & 0.171 \\ 0.125 & 0.145 & 0.17 \\ 0.109 & 0.139 & 0.168 \end{pmatrix}, \; M_\psi = \begin{pmatrix} 0.633 & 0.489 & 0.375 \\ 0.652 & 0.495 & 0.377 \\ 0.739 & 0.517 & 0.383 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

В таблицах 3.5-3.7 приведены численные значения D_n, вычисленные по формуле (3.13) для субкомбинации 1а (трещина AB) и 3-х вариантов длин и углов (трещина A′B′):

1) L=30мм, d=90мм, β=30°

Таблица 3.5

Численные значения нормальных раскрытий OB (вар.1)

x ,мм	1.5	4.5	7.5	10.5	13.5	16.5	19.5	22.5	25.5	28.5
D_n ,мкм	-1.919	-1.673	-1.483	-1.319	-1.169	-1.024	-0.881	-0.733	-0.571	-0.371

2) L=20мм, d=100мм, β=45°

Таблица 3.6

Численные значения нормальных раскрытий OB (вар.2)

x ,мм	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
D_n ,мкм	-1.937	-1.698	-1.513	-1.35	-1.200	-1.056	-0.911	-0.760	-0.593	-0.386

3) L =40мм, d=120мм, β=60°

Таблица 3.7

Численные значения нормальных раскрытий ОВ (вар.3)

x ,мм	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38
D_n ,мкм	-1.901	-1.648	-1.455	-1.289	-1.138	-0.995	-0.854	-0.709	-0.551	-0.357

На рисунках 3.13-3.15 приведены графики функции $|D_n(x)|$ трещины ОВ вблизи вершины трещины. Аналитическое решение получено по формуле (3.24), численное – с использованием МРС.

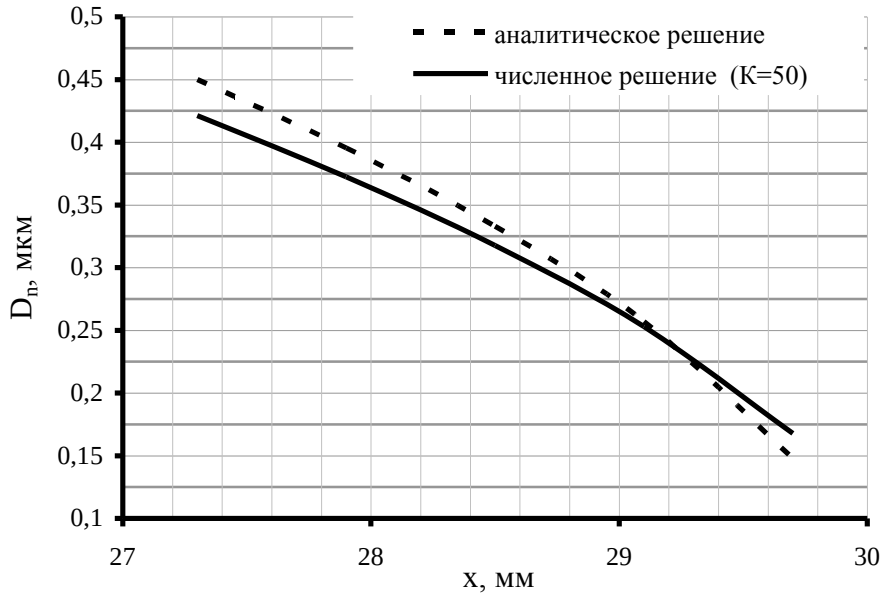


Рис.3.13 Нормальное раскрытие зияющей части горизонтальной трещины (вар. 1)

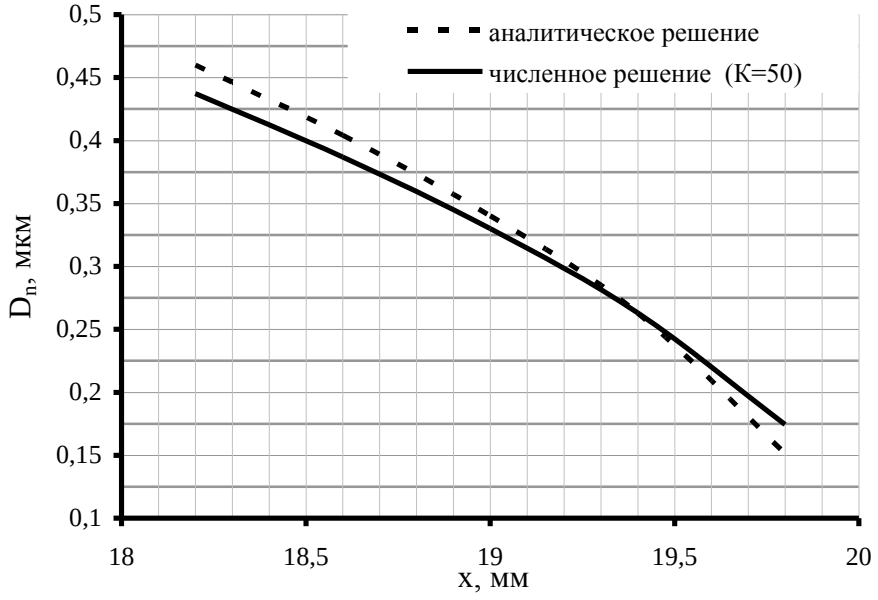


Рис.3.14 Нормальное раскрытие зияющей части горизонтальной трещины (вар. 2)

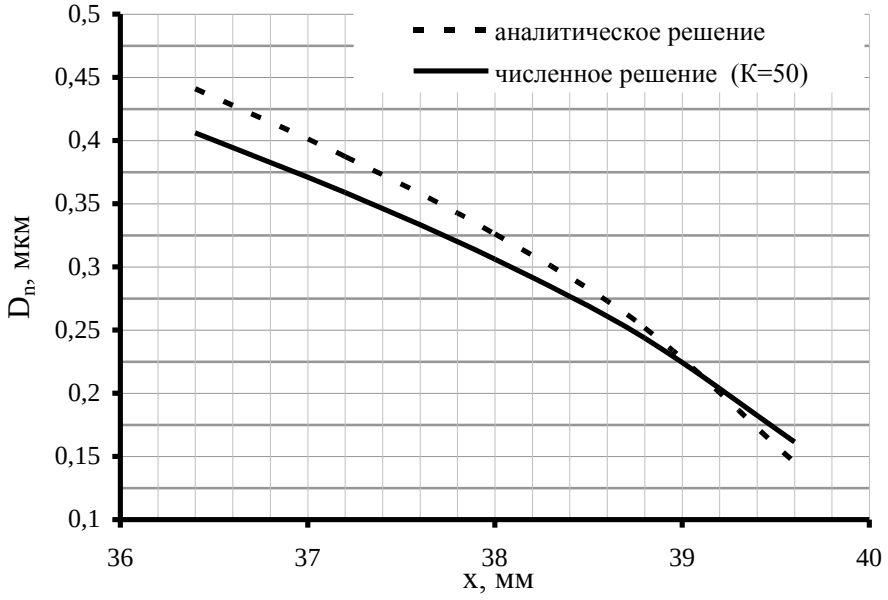


Рис.3.15 Нормальное раскрытие зияющей части горизонтальной трещины (вар. 3)

На Рис. 3.16-3.18 приведены графики относительных погрешностей, на которых имеется подобие по длине ОВ как при К=10, так и при К=50.

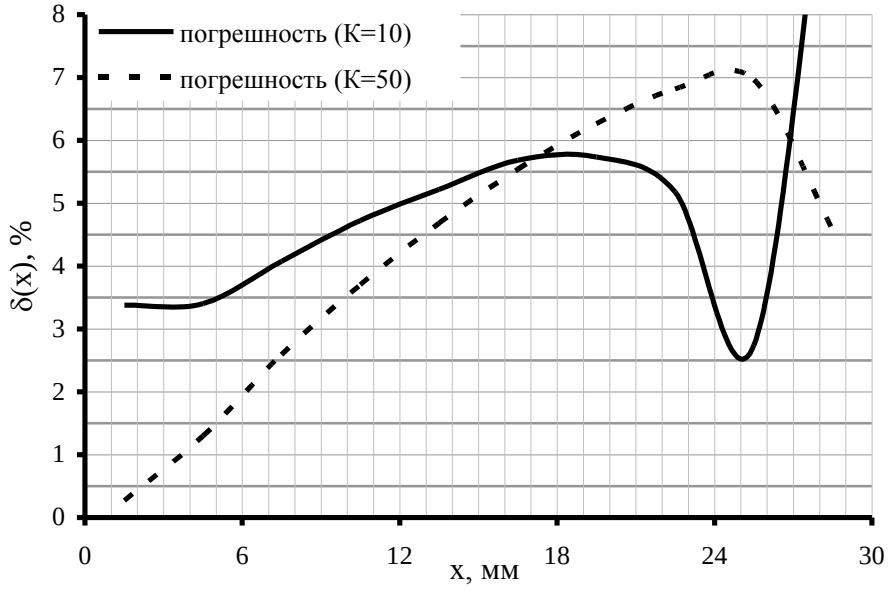


Рис.3.16 Относительная погрешность решений для варианта 1 (g=0)

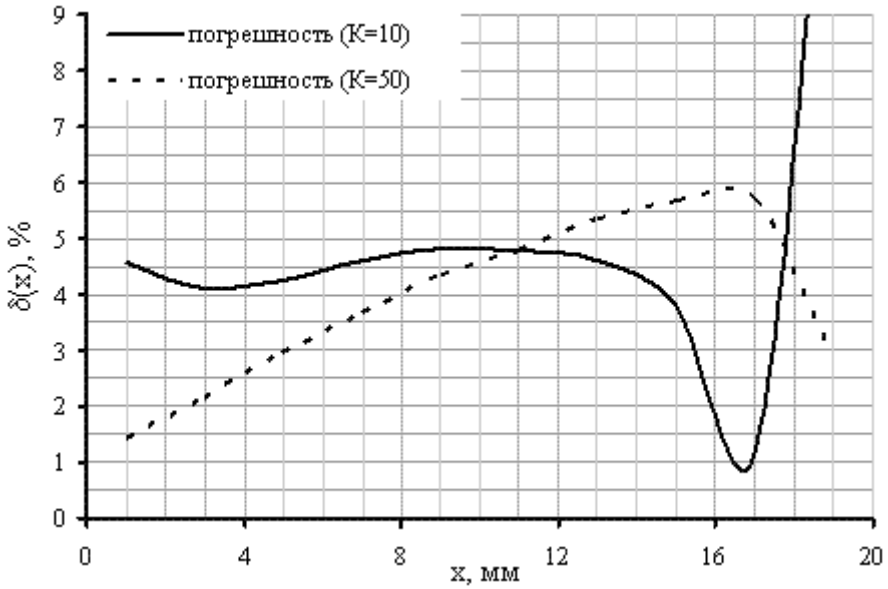


Рис.3.17 Относительная погрешность решений для варианта 2 (g=0)

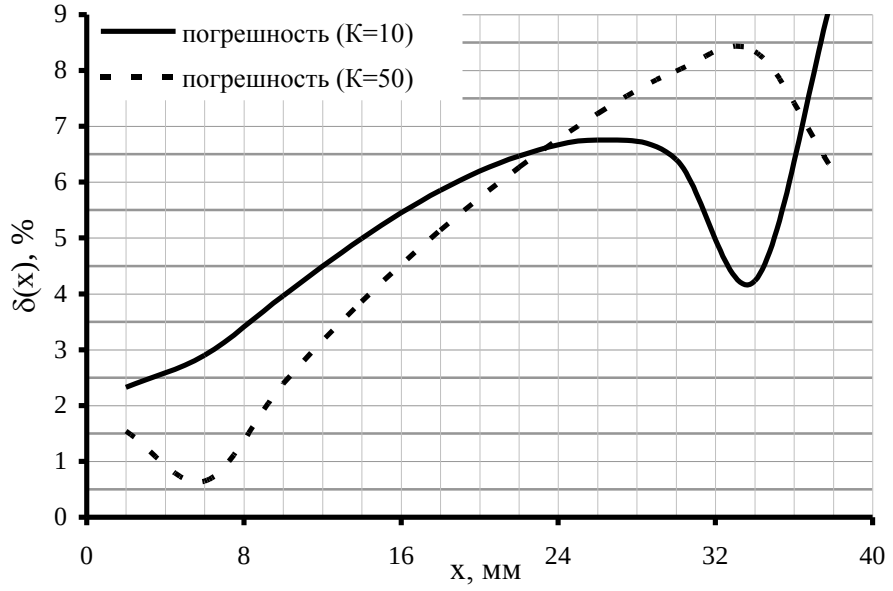


Рис.3.18 Относительная погрешность решений для варианта 3 (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.16 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 11.4% , а при $K = 50$ - значения 7%. На Рис.3.18 видно, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 9.4% , а при $K = 50$ - значения 8.3%. Наименьшие погрешности характерны для варианта 2 (Рис.3.17). Максимальная погрешность численного решения (К=10) составляет 13.5 %, а численного решения (К=50) – 5.7%. При этом численные решения МРС при $K = 50$ стремятся к значениям аналитического решения Черепанова, а при $K = 10$ - расходятся вблизи вершины трещины.

На Рис.3.19 показана графическая интерпретация изменения нормального раскрытия трещины $A'B'$ от угла наклона $\beta = 30^0$ и различных значениях длин L и d, которые в сумме дают 9, 6 и 4 см. На Рис.3.19 видно, что положение максимума функция распределения нормальных разрывов смещается в сторону вершины трещины при увеличении расстояния ВН. При этом существенно уменьшаются абсолютные значения разрывов.

Исходя из полученных результатов, КИН 1-го рода представим в виде, аналогичном (3.18), т.е.

$$K_I = K_I^{(1)} f_2(d, L) \qquad (3.27)$$

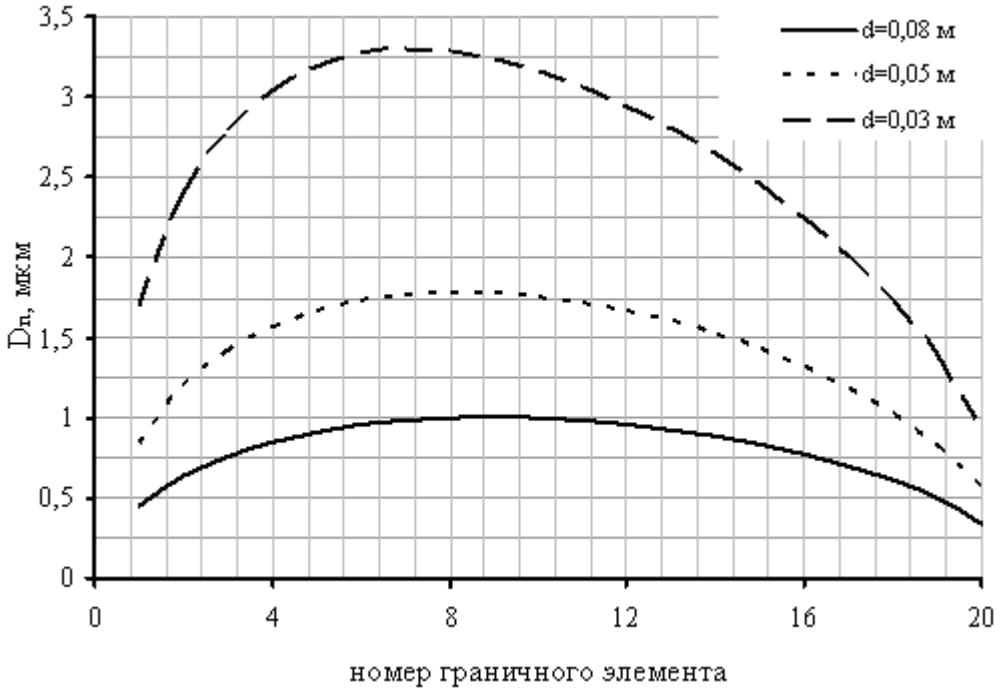


Рис.3.19 Распределение нормального раскрытия трещины A′B′

Обозначим $\chi = L + d$. Тогда с учетом (3.26) при фиксированном значении L аппроксимирующую функцию перепишем в виде

$$f_2(\beta,\chi) = 1 - \Phi(\beta,\chi)\cdot\exp\left\{-\Psi(\beta,\chi)\frac{\chi - L_0}{L_0}\right\}, \tag{3.28}$$

где функции Φ и Ψ образованы матрицами M_ϕ и M_ψ при интерполяции сплайнами порядка W

$$f(\beta,\chi) = \sum_{i=0}^{W}\sum_{i=0}^{W} m_{ij}\beta^i\chi^j\,,\ f = \Phi,\Psi\,, \tag{3.29}$$

где коэффициенты m_{ij} находятся известными методами [66]. В этом случае при критическом значении КИН функциональные зависимости $\chi = \chi(\beta)$ или $\beta = \beta(p)$ могут быть найдены из решения уравнения

$$K_I^{(1)} = \frac{\alpha u_n^0}{\sqrt{L_0}} f_2(\beta,\chi) \to \frac{K_{Ic}}{\alpha u_n^0}\sqrt{L_0} = f_2(\beta,\chi)\,. \tag{3.30}$$

Полученное уравнение может быть решено аналитически только лишь в случае, если функцию $f_2(\beta,\chi)$ представить в виде разделенных функций. Для этого достаточно аппроксимировать функцию $f_2(\beta,\chi)$ как единое целое (весовые коэффици-

енты $h_{i,j}$). Наиболее простая зависимость образуется при аппроксимации $\chi = \chi(\beta)$ линейными сплайнами, охватывающими самые ближние к вершине узлы сетки граничных элементов. Здесь имеет место дробно-линейная зависимость

$$\chi(\beta) = \frac{\left(\alpha u_n^0\right)^{-1} K_{Ic}\sqrt{L_0} - \left(h_{00} + h_{10}\beta\right)}{h_{01} + h_{11}\beta}. \tag{3.31}$$

Отсюда следует, что функция

$$d\left(\beta, L_0\right) = \frac{\left(\alpha u_n^0\right)^{-1} K_{Ic}\sqrt{L_0} - \left(h_{00} + h_{10}\beta\right)}{h_{01} + h_{11}\beta} - L_0 \tag{3.32}$$

имеет полюс $\beta = -h_{01}/h_{11}$ и имеет физический смысл только при условии $d > 0$. При интерполяции полиномами высокого порядка уравнение (3.30) становится трансцендентным, а его решение может быть получено только численными методами.

На основании вышеизложенного следует, что при удалении природной трещины от зияющей величины нормального раскрытия трещины уменьшаются. Так, при изменении d от 3 до 8 см в среднем нормальные раскрытия естественной трещины уменьшаются в 3.2 раза, а сдвиговые раскрытия берегов трещины присутствуют во всех рассматриваемых случаях и близки к нулю. Отсюда следует, что рост трещины отрыва в геоматериале зависит от расположения в нем естественной трещины, т.е. чем ближе расположена природная трещина к трещине отрыва, тем быстрее происходит ее развитие.

3.4 Модель развития трещины с линейными и параболическими функциями нормальных смещений берегов основной части

На рисунках 3.20-3.22 представлены геометрические модели трещины отрыва, в которой на основной трещине АО заданы линейные и параболические функции нормальных смещений точек берегов трещины [56]:

1) возрастающая линейная

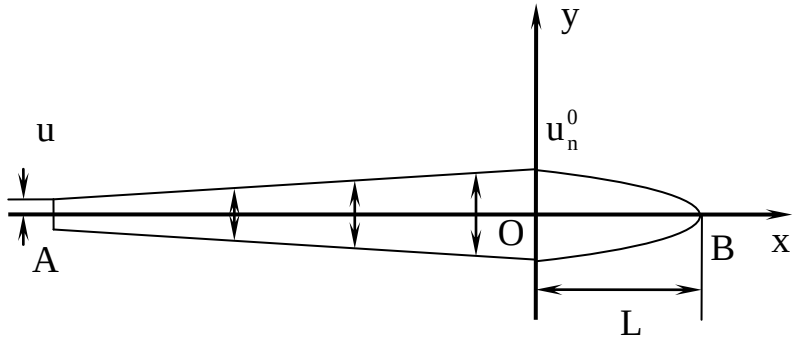


Рис.3.20
Трещина отрыва (вид 1)

2) убывающая линейная

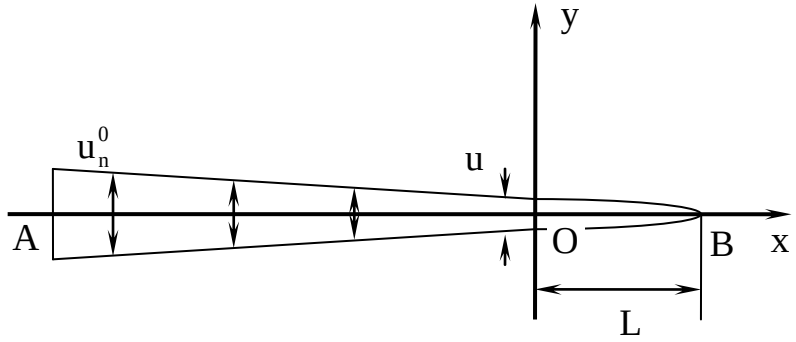


Рис.3.21
Трещина отрыва (вид 2)

3) параболическая

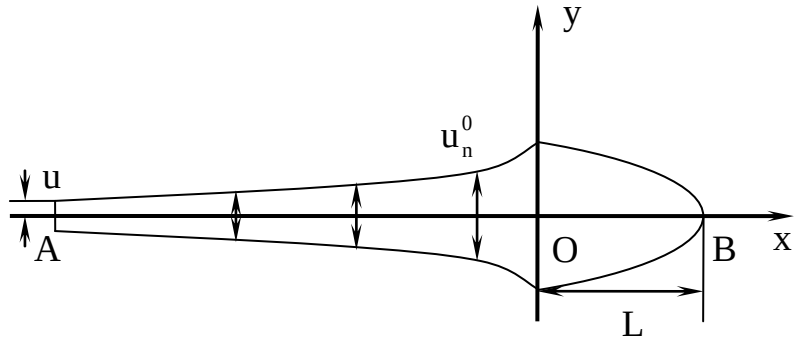


Рис.3.22
Трещина отрыва, образованная параболической функцией нормальных смещений

Для указанных геометрических моделей граничные условия задачи соответствуют субкомбинации 1а (таблица 2.2) при заданных нормальных смещениях в виде линейной или параболической функции координат. В порядке следования рисунков имеем следующие ГУ ($L_2 = 10L_0$):

$$u_n^{(1)}(x,u) = \left(u - u_n^0\right)\frac{x}{L_2} + u_n^0,\ 0 \le u \le u_n^0; \tag{3.33}$$

$$u_n^{(2)}(x,u) = u_n^0 - \left(u - u_n^0\right)\frac{x}{L_2},\ \frac{u_n^0}{6} \le u \le u_n^0; \tag{3.34}$$

$$u_n^{(3)}(x,u) = \frac{u_n^0 - u}{L_2^2}\left(x + L_2\right)^2 + u,\ 0 \le u \le u_n^0; \tag{3.35}$$

Исходя из численного решения задачи с помощью МРС при $u = 0.5u_0$ получены аппроксимирующие зависимости в виде, аналогичном (3.16), т.е.

$$D_n(x,u) = D_n^{(1)}(x) f_{w+2}\left(u, u_n^0\right), \tag{3.36}$$

$$f_{w+2}\left(u, u_n^0\right) = k_w \frac{u}{u_n^0} + m_w, \; w = 1,2,3, \tag{3.37}$$

$$k = \{0.09217;\; 0.9067;\; 0.1549\}, \quad m = \{0.89394;\; 0.0933;\; 0.8451\}.$$

В таблице 3.8 приведены численные значения D_n, полученные по формуле (3.36) с использованием (3.33)-(3.35) и (3.37).

Таблица 3.8

Численные значения нормальных раскрытий с распределением смещений

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм										
$u_n^{(1)}$	-1.916	-1.679	-1.495	-1.334	-1.187	-1.044	-0.901	-0.752	-0.587	-0.383
$u_n^{(2)}$	-1.019	-0.91	-0.822	-0.741	-0.666	-0.591	-0.514	-0.432	-0.339	-0.222
$u_n^{(3)}$	-1.885	-1.644	-1.460	-1.3	-1.154	-1.013	-0.873	-0.728	-0.568	-0.369

На рисунках 3.23-3.25 приведены графики функции $|D_n(x)|$ для зияющей части трещины вблизи вершины, полученные в результате ВЭ.

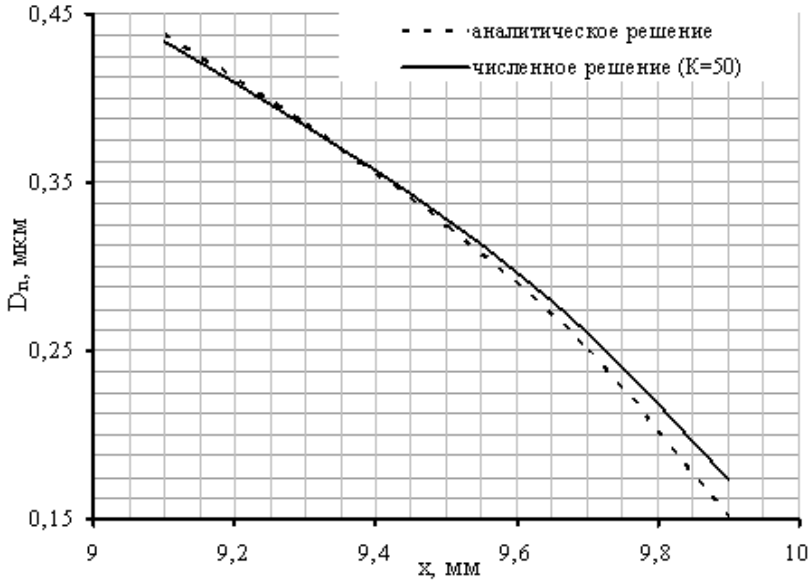


Рис.3.23 Нормальное раскрытие зияющей части трещины с распределением смещений $u_n^{(1)}$

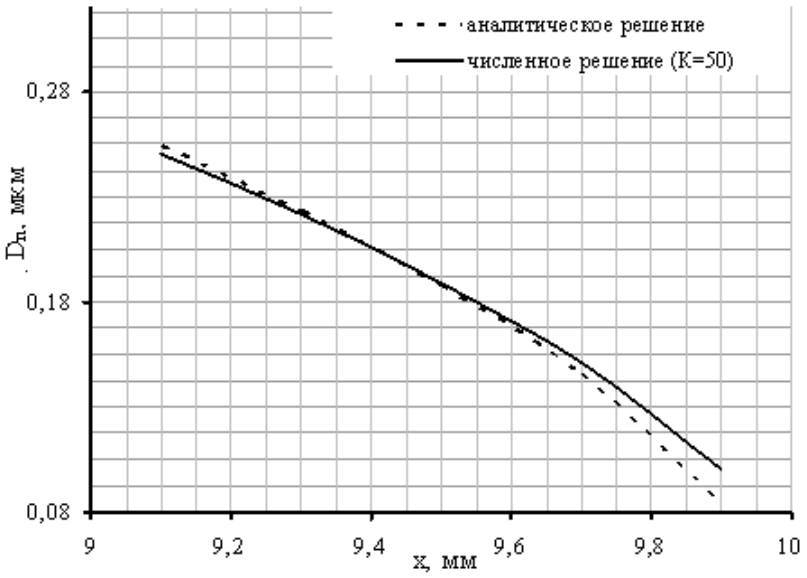


Рис.3.24 Нормальное раскрытие зияющей части трещины с распределением смещений $u_n^{(2)}$

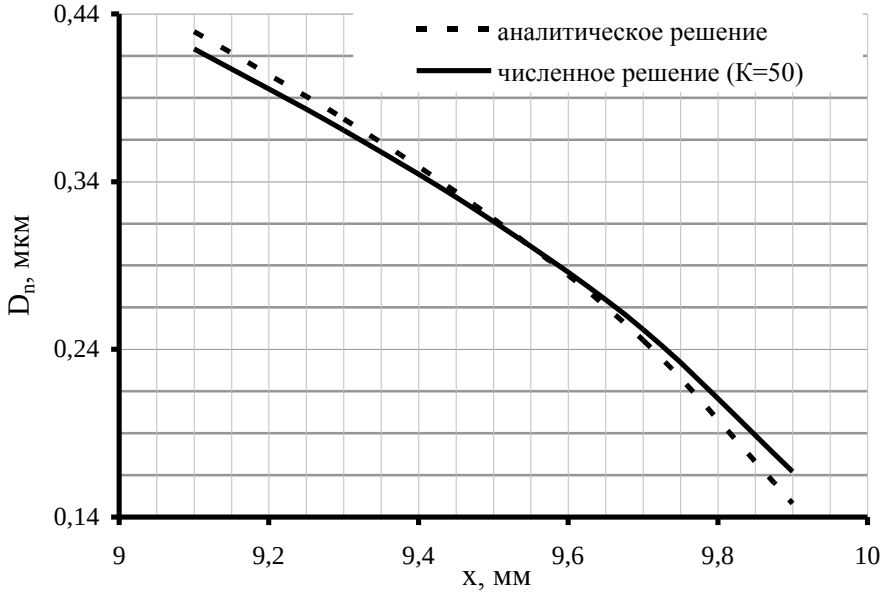


Рис.3.25 Нормальное раскрытие зияющей части трещины с распределением смещений $u_n^{(3)}$

Распределение относительной погрешности решений приведено на Рис.3.26-3.28. На Рис.3.26 видно, что в ряде точек численное решение совпадает с аналитическим.

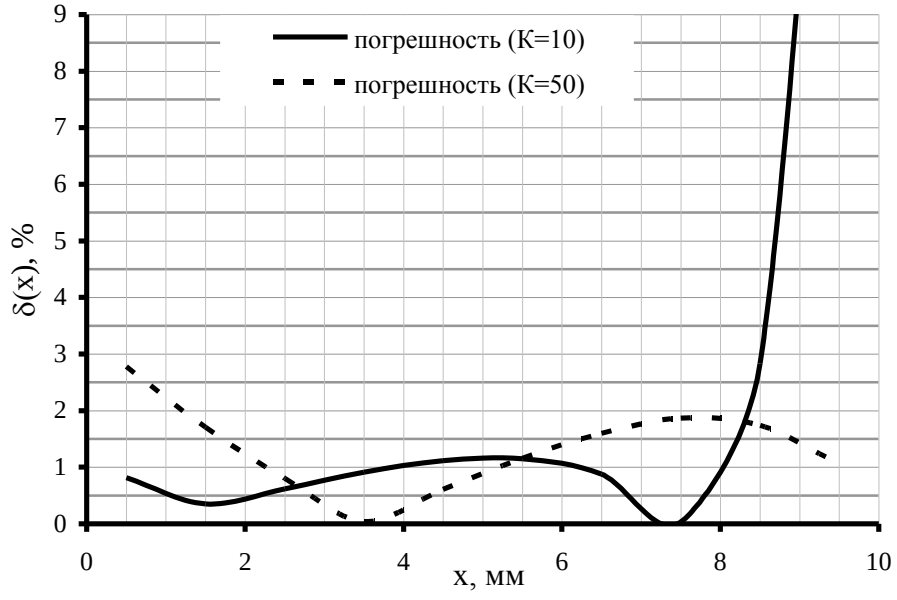


Рис.3.26 Относительная погрешность решений с распределением смещений $u_n^{(1)}$ (g=0)

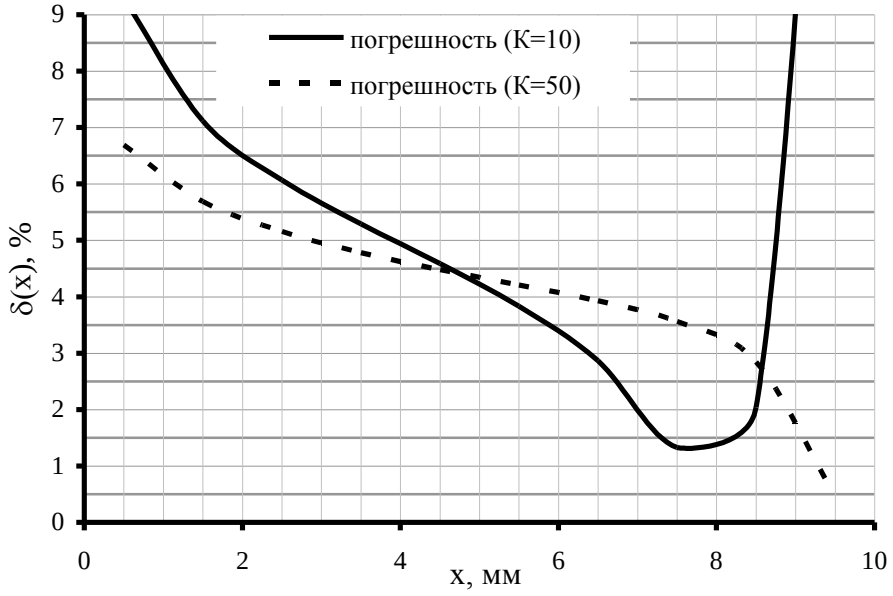


Рис.3.27 Относительная погрешность решений с распределением смещений $u_n^{(2)}$ (g=0)

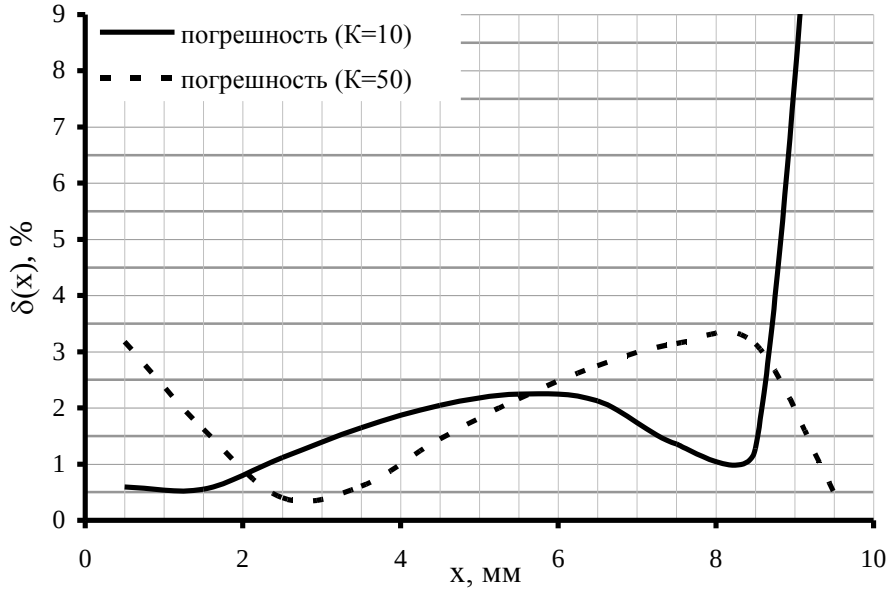


Рис.3.28 Относительная погрешность решений с распределением смещений $u_n^{(3)}$ (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.26 следует, что при $K=10$ относительная погрешность достигает значения 18% , а при $K=50$ - значения 2.8%. На Рис.3.27 видно, что при $K=10$ относительная погрешность достигает значения 18% , а при $K=50$ - значения 6.7%, а на Рис.3.28 относительная погрешность при $K=10$ достигает значения 16.3% , а при $K=50$ - значения 3.2%. При этом численные решения МРС при $K=50$ стремятся к значениям аналитического решения Черепанова, а при $K=10$ - расходятся вблизи вершины трещины.

Исходя из полученных результатов, КИН 1-го рода представим в виде

$$K_I = K_I^{(1)} f_{w+2}(u, u_n^0). \tag{3.38}$$

При критическом значении КИН 1-го рода получаем функциональную зависимость

$$u_w\left(u_n^0\right) = \left(\frac{K_{Ic}}{\alpha u_n^0}\sqrt{L_2} - m_w\right)\frac{u_n^0}{k_w}. \tag{3.39}$$

Граница между зонами развития (II) и зонами стагнации (I), определяемая функцией (3.39), представлена на Рис.3.29.

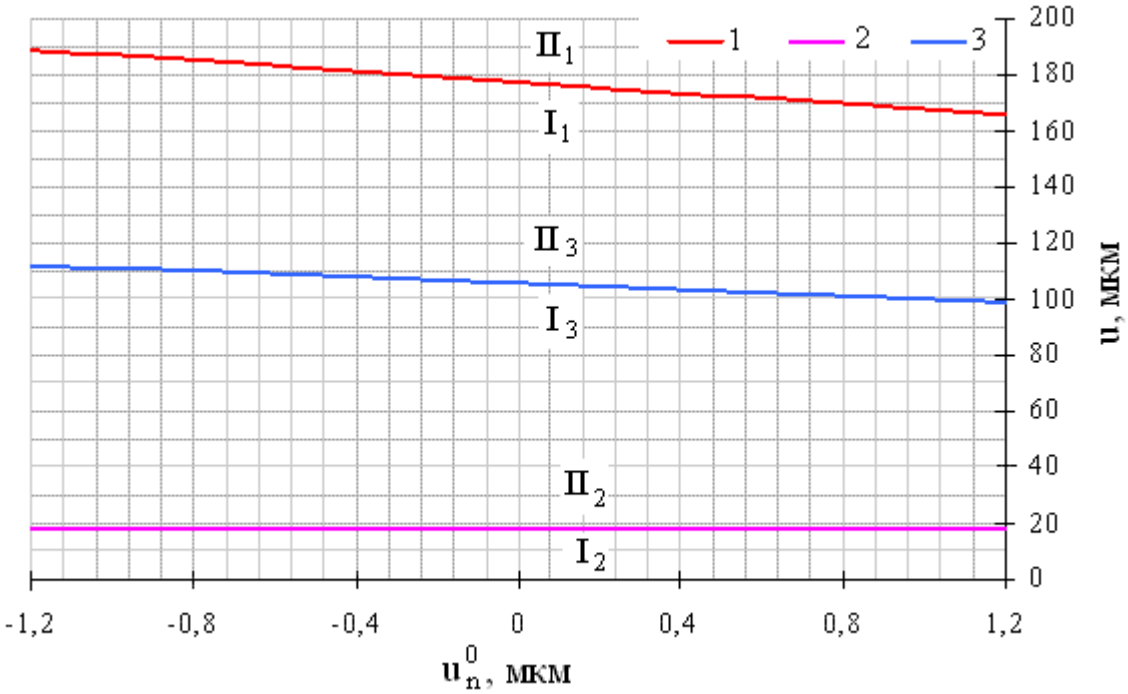


Рис.3.29 Функциональная зависимость $u = u\left(u_n^0\right)$ при K_{Ic}.

Из Рис.3.29 видно, что все функции имеют разный угол наклона у оси абсцисс и достаточно слабую зависимость от заданной на берегах величины нормального смещения. При этом заметно, что линия №2 параллельна ей. В связи с этим убывающая линейная функция раскрытия берегов является независимой от величины смещения в устье зияющей части трещины в песчанике.

3.5 Математическая модель развития трещины в условиях сжатия и сдвига ее берегов

Рассмотрим модель развития трещины отрыва и сдвига в сплошном геоматериале. На Рис.3.30 приведена геометрическая модель трещины, на которой заданы нормальные сжимающие и касательные смещения. Решение задачи с ГУ для субкомбинации 7д

$$u_n^i = u_n^0,\ u_s^i = -u_s^0 \tag{3.40}$$

и ее решение рассмотрено в работе [54].

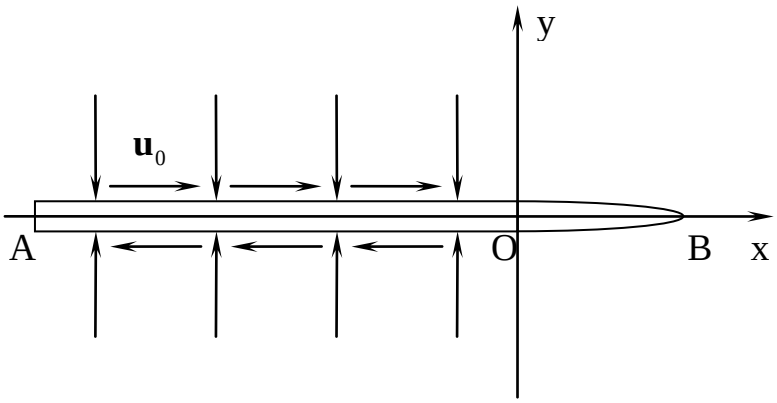


Рис.3.30 Геометрическая модель трещины для субкомбинации 7д

Исходя из результатов ВЭ, получены функциональные зависимости нормального и сдвигового раскрытий зияющей трещины

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x)\psi_n\left(u_n^0, u_s^0\right), \tag{3.41}$$

$$D_s(x) = D_s^{(1)}(x)\psi_s\left(u_n^0, u_s^0\right), \tag{3.42}$$

где функции ψ_n и ψ_s имеют вид

$$\psi_n\left(u_n^0, u_s^0\right) = \kappa_1 \frac{u_s^0}{u_n^0} - \kappa_2, \tag{3.43}$$

$$\psi_s\left(u_n^0, u_s^0\right) = \kappa_2 \frac{u_n^0}{u_s^0} + \kappa_1, \tag{3.44}$$

$$\kappa = (0.2209;\ 1.035).$$

В таблице 3.9 представлены численные значения разрывов, вычисленные по формулам (3.41) и (3.42) соответственно при $u_s^0 = 10u_n^0$ и $u_s^0 = u_n^0$.

Таблица 3.9

Численные значения раскрытий (субкомбинация 7д)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	-3.027	-2.480	-2.099	-1.797	-1.542	-1.314	-1.103	-0.896	-0.683	-0.435
D_s , мкм	-2.438	-2.137	-1.903	-1.7	-1.512	-1.331	-1.149	-0.96	-0.749	-0.489

На Рис.3.31 представлены графики функции $|D_s(x)|$, а на Рис.3.32 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины.

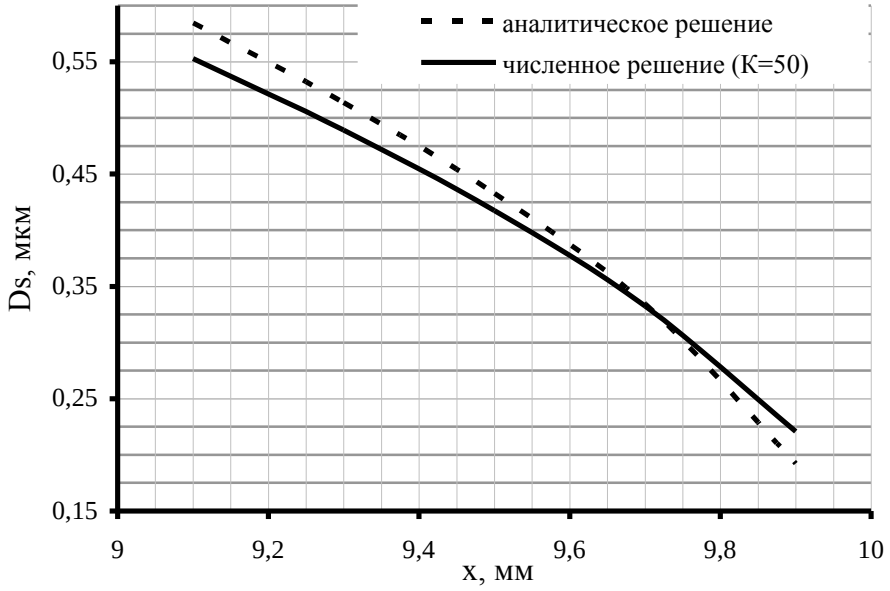


Рис.3.31 Сдвиговое раскрытие зияющей части трещины

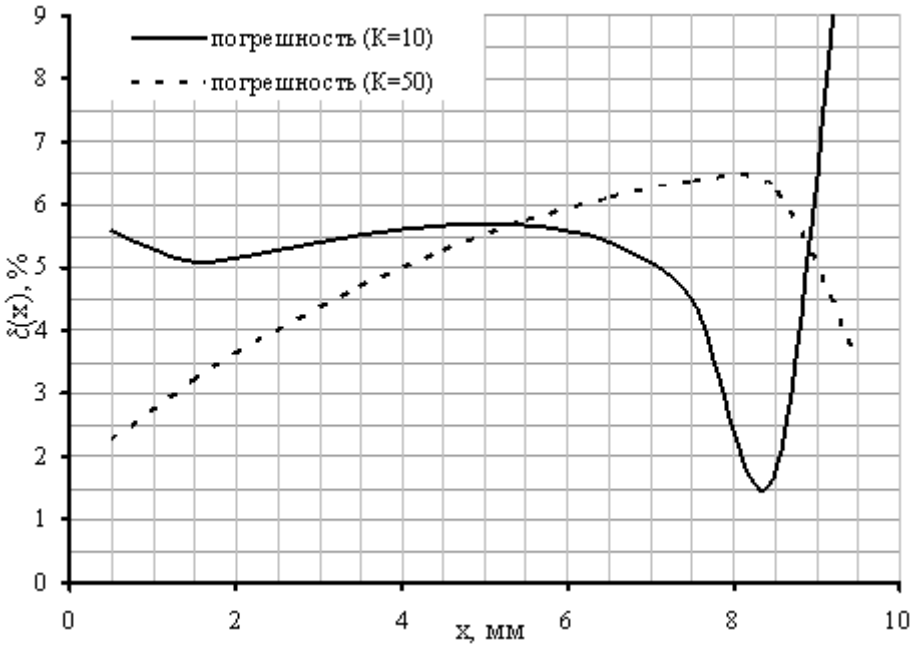


Рис.3.32 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.31 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 13% , а при $K = 50$ - значения 6.4%.

На Рис.3.33 представлены графики функции $|D_n(x)|$, а на Рис.3.34 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

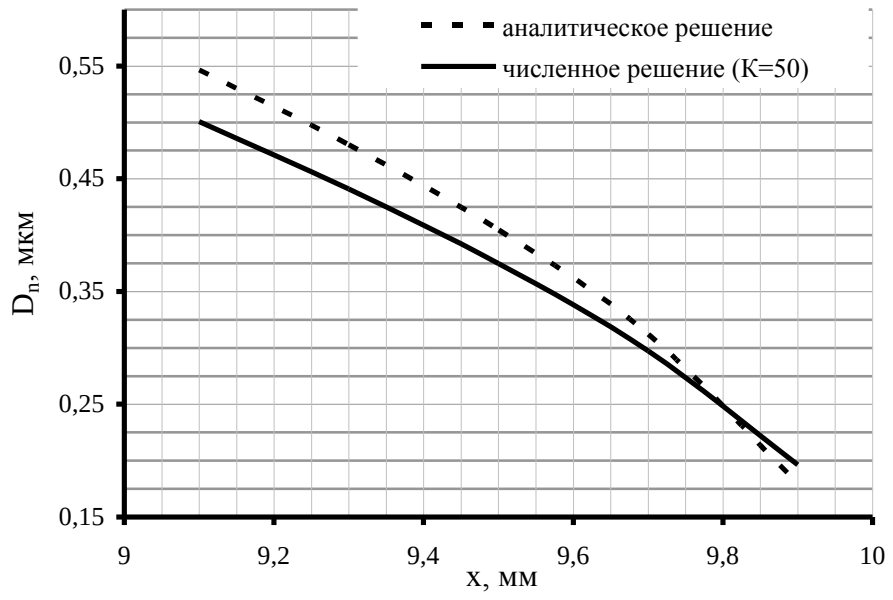


Рис.3.33 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

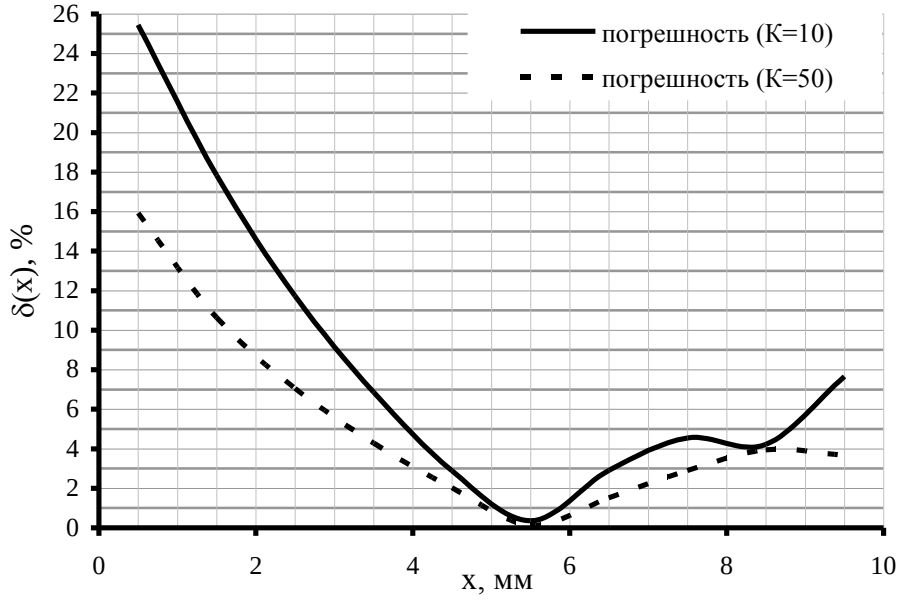


Рис.3.34 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.33 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 25.5% , а при $K = 50$ - значения 16%. При этом численные решения МРС стремятся к значениям аналитического решения Черепанова.

Далее, КИН 1-го и 2-го родов запишутся как

$$K_I^{(4)} = K_I^{(1)} \left\{ \kappa_1 \frac{u_s^0}{u_n^0} - \kappa_2 \right\}, \tag{3.45}$$

$$K_{II}^{(4)} = K_{II}^{(1)} \left\{ \kappa_1 \frac{u_s^0}{u_n^0} + \kappa_2 \right\}. \tag{3.46}$$

Поскольку

$$K_I^{(1)} = \frac{\alpha u_n^0}{\sqrt{L}}, \tag{3.47}$$

то согласно (3.5) выражение (3.46) запишем относительно $K_I^{(1)}$, т.е.

$$K_{II}^{(4)} = K_I^{(1)} \left\{ \kappa_2 \frac{u_s^0}{u_n^0} + \kappa_1 \right\}. \tag{3.48}$$

При критическом значении выражения (3.45) и (3.48) позволяют определить функциональную зависимость между u_n^0 и u_s^0. Поэтому после преобразований (3.45) и (3.48) получаем соответственно возрастающую и убывающую линейные зависимости:

$$u_n^0\left(u_s^0\right) = \frac{1}{\kappa_2}\left[\frac{K_{Ic}}{\alpha}\sqrt{L} + \kappa_1 u_s^0\right], \tag{3.49}$$

$$u_n^0\left(u_s^0\right) = \frac{1}{\kappa_1}\left[\frac{K_{IIc}}{\alpha}\sqrt{L} - \kappa_2 u_s^0\right]. \tag{3.50}$$

Границы между зонами развития и зонами стагнации, определяемая с помощью (3.49) и (3.50), представлена на Рис.3.35. Поскольку сжатие происходит только при $u_n^0 > 0$, то верхняя полуплоскость системы координат разделена на 4 зоны, образованные прямыми (3.49) и (3.50) путем пересечения в точке

$$u_s^0 = \frac{\left(\kappa_2 K_{IIc} - \kappa_1 K_{Ic}\right)\sqrt{L}}{\alpha\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)},\ u_s^0\Big|_{L=L_0} = 26.9887\,\text{мкм}. \tag{3.51}$$

Поскольку зоны развития занимают область над прямыми, то развитие трещины в зависимости от соотношения между нормальными и сдвиговыми смещениями может происходить по 4-м сценариям. Зона I (под прямыми) образует зону стагнации. В зоне II (слева между прямыми) развитие происходит только под действием нормальных смещений, в зоне III (справа между прямыми) – только под

действием сдвиговых смещений. В зоне IV (над обоими прямыми) развитие трещины происходит в результате совместного действия нормальных и сдвиговых смещений на основной части трещины [82].

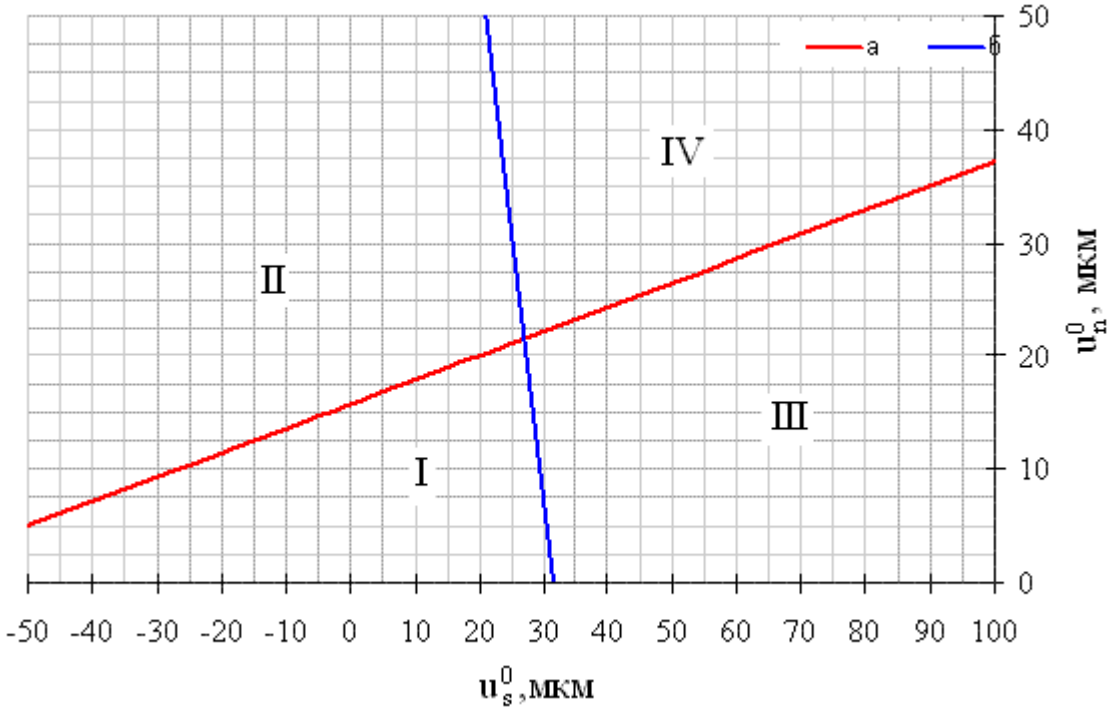


Рис.3.35 Функциональная зависимость $u_n^0 = u_n^0\left(u_s^0\right)$ при K_{Ic} и K_{IIc}.

Далее рассмотрим трещину, на берегах которой граничные условия (3.40) дополнены действием напряжений в зияющей части трещины (см. Рис.2.1) для двух субкомбинаций.

Субкомбинация 13б при $\sigma_n^0 > 0$. При выполнении анализа идентичности распределений разрывов берегов трещины было установлена идентичность между сдвиговыми смещениями для субкомбинации 7д и сдвиговыми для комбинации 13 с погрешностью $r = 0.47\,\%$. Из установленной идентичности в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать аналогично (3.42), а КИН 2-го рода – в виде (3.48).

В работе [54] приведено решение подобной задачи, где аппроксимирующая зависимость нормального суммарного раскрытия зияющей трещины имела вид, полученный из выражения (3.7). Для рассматриваемой задачи

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x)\frac{\psi_n\left(u_n^0, u_s^0\right)}{u_n^0} + \tau_n D_n^{(\sigma)}(x), \qquad (3.52)$$

$$\tau_n = -0.9244. \tag{3.53}$$

Очевидно, что в явном виде КИН 1-го рода запишется как

$$K_I^{(5)} = K_I^{(4)} + \tau_n q_n. \tag{3.54}$$

В таблице 3.10 представлены численные значения D_n, вычисленные по формуле (3.52) для случая $u_s^0 = 10u_n^0$.

Таблица 3.10

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 13б)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	-3.024	-2.475	-2.093	-1.791	-1.536	-1.308	-1.096	-0.891	-0.678	-0.432

На Рис.3.36 представлены графики функции $|D_n(x)|$, а на Рис.3.37 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

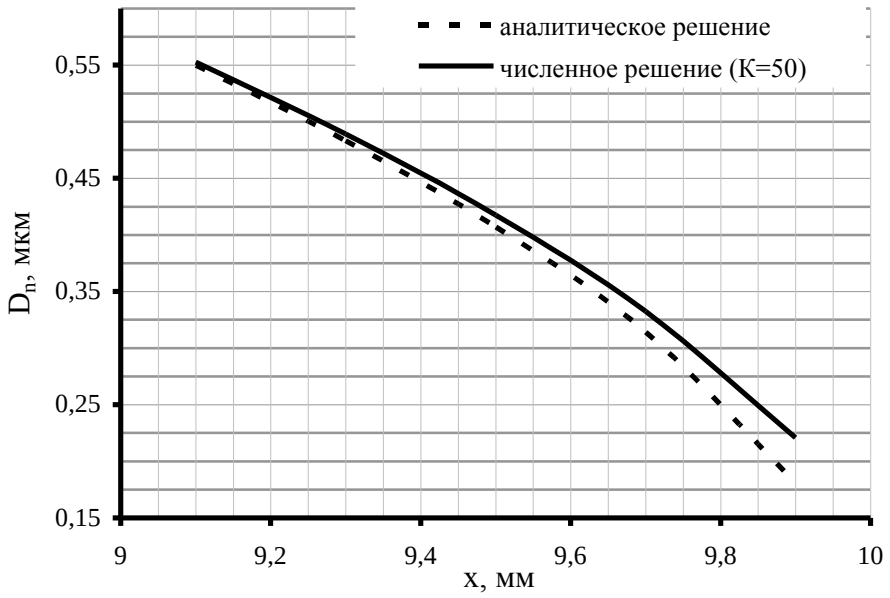


Рис.3.36 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

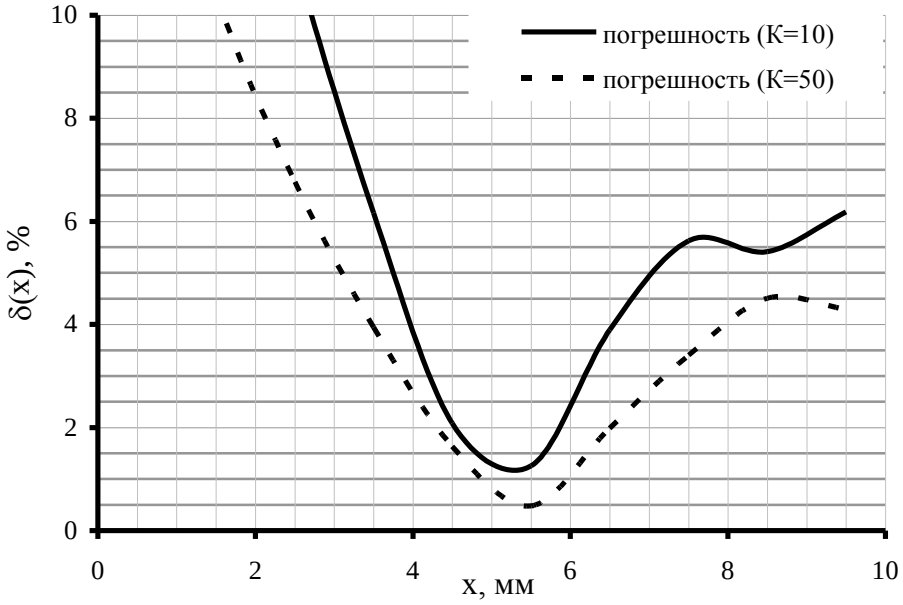


Рис.3.37 Относительная погрешность решений ($g = 0$)

Из анализа графиков на Рис.3.37 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 25.2% , а при $K = 50$ - значения 15.8%. При этом численные решения МРС стремятся к значениям аналитического решения Черепанова.

Субкомбинация 14б при $\sigma_s^0 > 0$. Решение такой задачи рассмотрено в работах [54,73]. В рамках анализа идентичности была установлена идентичность между нормальными смещениями для субкомбинации 7д и нормальными для комбинации 14 с погрешностью $r = 0.3\%$. Из установленной идентичности в модели трещины смешанного типа функцию нормального раскрытия берегов можно записать аналогично (3.52) в виде

$$D_s(x) = D_s^{(1)}(x)\frac{\psi_s\left(u_n^0, u_s^0\right)}{u_s^0} + \tau_s D_s^{(\sigma)}(x). \qquad (3.55)$$

Здесь в явном виде КИН 2-го рода запишется как

$$K_{II}^{(5)} = K_{II}^{(4)} + \tau_s q_s. \qquad (3.56)$$

Численные значения D_s, вычисленные по формуле (3.55), представлены в таблице 3.11. На Рис.3.38 представлены графики функции $|D_s(x)|$, а на Рис.3.39 –

относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

Таблица 3.11

Численные значения нормальных раскрытий (субкомбинация 14б)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_s ,мкм	-2.434	-1.132	-1.898	-1.694	-1.506	-1.325	-1.143	-0.954	-0.745	-0.485

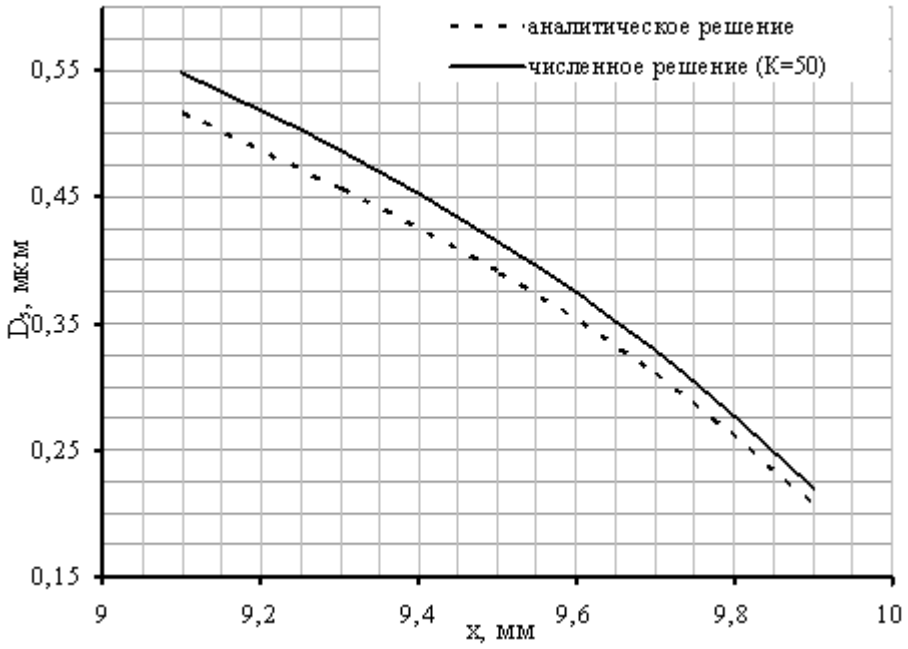


Рис.3.38 Сдвиговое раскрытие зияющей части трещины

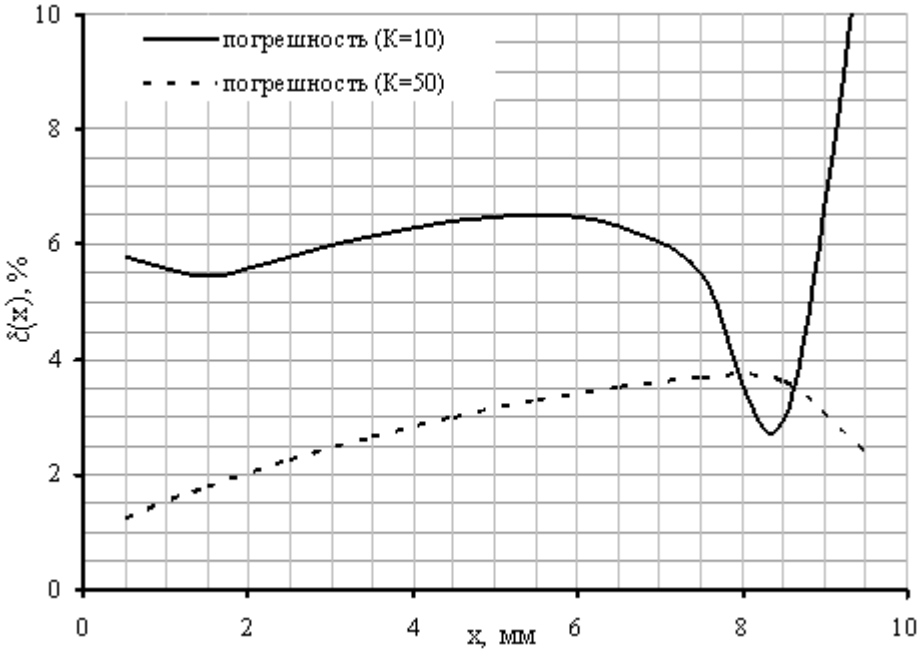


Рис.3.39 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.39 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 11,5% , а при $K = 50$ - значения 3.7%.

3.6 Математическая модель развития плоской трещины: общий случай

Рассмотрим краевую задачу для трещины с ГУ, соответствующими комбинации 15 (Рис.2.1).

Субкомбинация 15а. На берегах основной части трещины заданы сжимающие нормальные и сдвиговые смещения, а зияющая часть находится под действием сжимающих и касательных напряжений (Рис.2.1а). В работе [53,76] приведено решение подобной задачи, где аппроксимирующие зависимости нормального и сдвигового суммарного раскрытия зияющей трещины определены соответственно выражениями (3.52) и (3.55) при коэффициенте (3.53), аппроксимированном в виде

$$\tau_n = 0.0343\sigma_s^0 - 0.9244\sigma_n^0, \ \tau_s = -\tau_n . \qquad (3.57)$$

В таблице 3.12 представлены численные значения раскрытий, вычисленные по формулам (3.52) и (3.55) с учетом (3.57) соответственно для случаев $u_s^0 = 10u_n^0$ и $u_s^0 = u_n^0$.

Таблица 3.12

Численные значения раскрытий (субкомбинация 15а)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	-3.023	-2.474	-2.093	-1.791	-1.535	-1.308	-1.096	-0.891	-0.678	-0.432
D_s ,мкм	-2.244	-2.141	-1.908	-1.706	-1.518	-1.337	-1.155	-0.965	-0.754	-0.492

На Рис.3.40 представлены графики функции $|D_s(x)|$, а на Рис.3.41 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

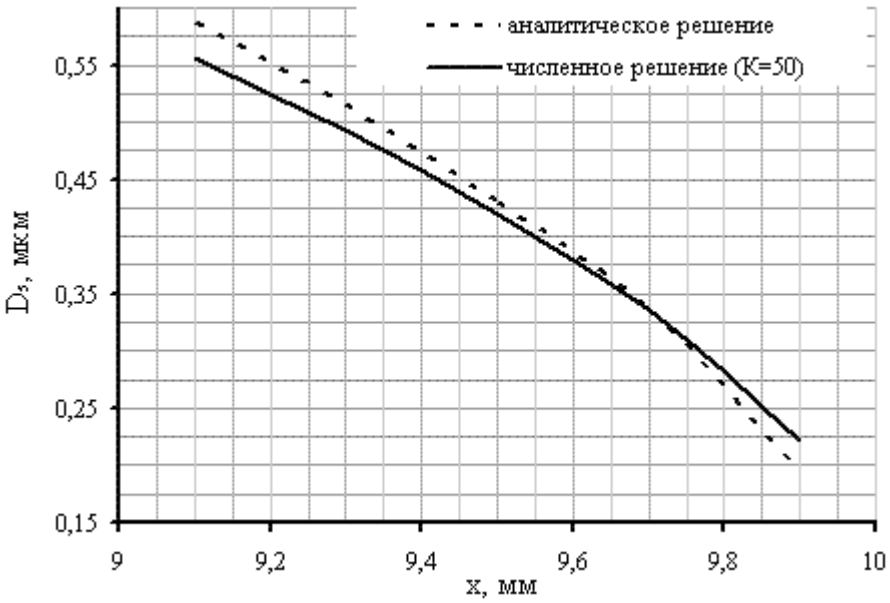


Рис.3.40 Сдвиговое раскрытие зияющей части трещины

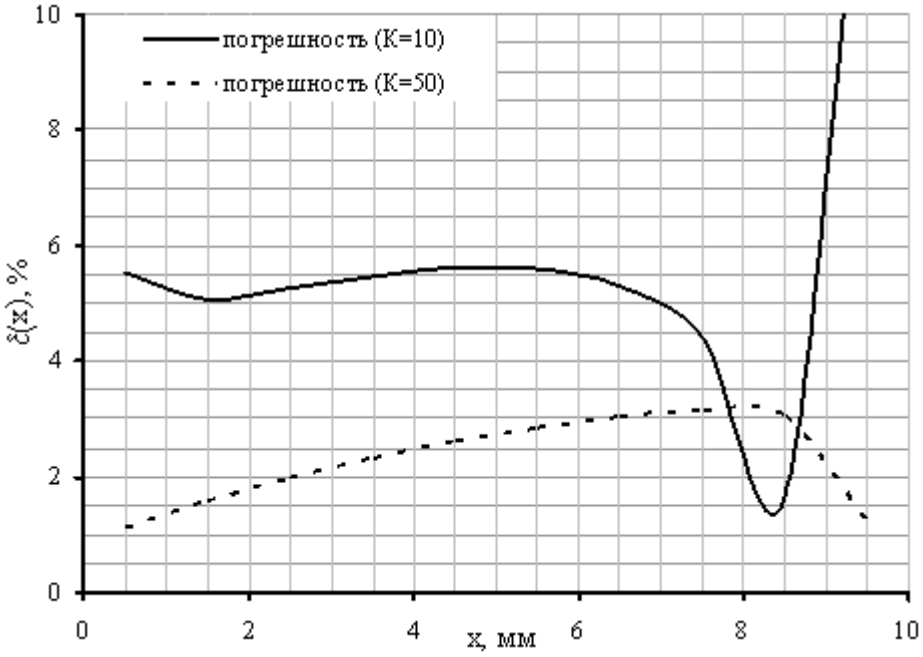


Рис.3.41 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.41 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 14,2% , а при $K = 50$ - значения 3.1%.

На Рис.3.42 представлены графики функции $|D_n(x)|$, а на Рис.3.43 – относительной погрешности решений вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

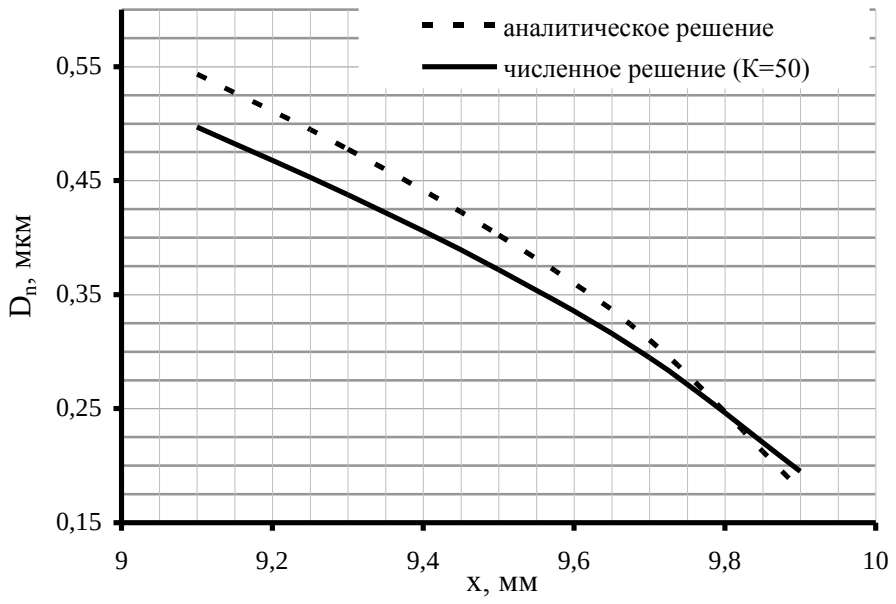


Рис.3.42 Нормальное раскрытие зияющей части трещины

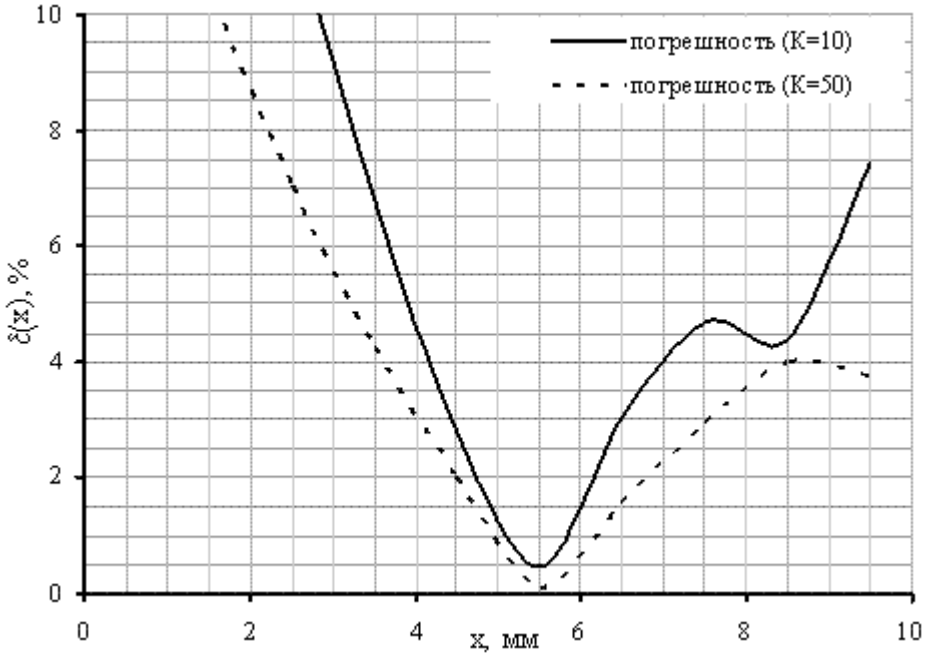


Рис.3.43 Относительная погрешность решений (g=0)

Из анализа графиков на Рис.3.43 следует, что при $K = 10$ относительная погрешность достигает значения 25.4% , а при $K = 50$ - значения 15.9%.

Субкомбинация 15б. Рассмотрим краевую задачу для трещины с ГУ, соответствующими субкомбинации 15б (Рис.2.1б). В таблице 3.13 представлены численные значения нормальных и сдвиговых раскрытий берегов трещины при $K = 750$.

Таблица 3.13

Численные значения нормальных и сдвиговых раскрытий (субкомбинация 15б)

x ,мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n ,мкм	3.591	2.396	1.609	0.920	0.248	-0.458	-1.251	-2.217	-3.567	-6.232
D_s ,мкм	-2.349	-2.485	-2.567	-2.635	-2.699	-2.763	-2.832	-2.911	-3.015	-3.193

На Рис.3.44 представлен график функции D_s, а на Рис.3.45 – график функции D_n вдоль зияющей части трещины без учета массовых сил.

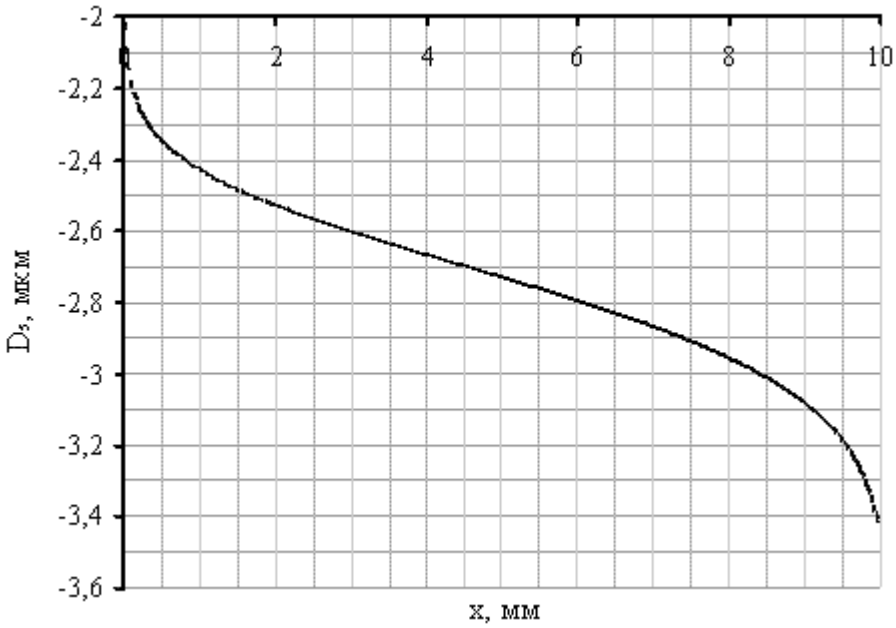


Рис.3.44 Сдвиговое раскрытие зияющей части трещины (К=750)

Рис.3.45 Нормальное раскрытие зияющей части трещины (К=750)

3.7 Выводы к третьей главе

Рассмотрены избранные модели раскрытия трещин. Получено решение соответствующих краевых задач, аппроксимированы функции нормальных и касательных смещений, разработаны аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода и проведено сравнение с аналитическими решениями Черепанова.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Предложенный алгоритм решения плоских краевых задач теории трещин включает численное решение краевой задачи со смешанными граничными условиями, аналитическую аппроксимацию смещений берегов трещины и формулы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода для сплошных упругих и нарушенных трещиноватостью тел.

2. Создан программный комплекс для моделирования раскрытия берегов трещин, который позволяет получать численное решение краевых задач теории трещин в смешанной постановке методом разрывных смещений, проводить количественный анализ и анализ идентичности распределений этих раскрытий в присутствии и отсутствии массовых сил.

3. Выполнен анализ идентичности распределений раскрытий берегов трещин смешанного типа под действием массовых сил и в их отсутствии для всех субкомбинаций трещин в песчанике. По результатам анализа определены субкомбинации граничных условий, для которых имеется полная (r=0.001%) и частичная (r=30%) идентичность распределения раскрытий.

4. Проведен качественный анализ решений краевых задач со смешанными грачиными условиями в широком диапазоне изменений значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона и исследованы закономерности изменения функций нормальных и касательных смещений берегов трещины с учетом и без учета массовых сил.

5. Получены численные решения избранных задач теории трещин смешанного типа в отсутствии действия массовых сил. Аппроксимированы функции нормальных и касательных смещений берегов трещины и получены аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут в дальнейшем использоваться

при решении задач для трещиноватых тел конечных размеров, а также имеющих дискретную структуру (зернистые, пористые и т.п.).

Сокращения

ВЭ - вычислительный эксперимент

СКУ - смешанные краевые условия

КИН - коэффициент интенсивности напряжений

МГЭ - метод граничных элементов

МРС - метод разрывных смещений

СЛАУ - система линейных алгебраических уравнений

Обозначения

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}^T$ - вектор перемещений, м

$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ - тензор напряжений, Н/м^2; $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$ - тензор деформаций; $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \end{pmatrix}^T$ - вектор массовых (объемных) сил, Н/м^2

$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_x & g_y \end{pmatrix}^T$ - вектор, определяющий направление действия массовых сил (свободного падения тел в поле сил тяжести), м/с^2

E - модуль упругости Юнга, Па

ν - коэффициент Пуассона

λ, μ - изотермические коэффициенты Лямэ

K - коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

ρ - плотность, кг/м^3

δ - относительная расходимость аналитического решения Черепанова и численного решения МРС, %

Список литературы

1. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения // ДАН СССР, т. XVII, №4, 1937, с.173-178.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986, 336 с.
3. Атлури С. Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990, 392 с.
4. Барон Л.И. Кусковатость и методы ее измерения. М.: Изд. АН СССР, 1960, 124 с.
5. Бегиашвили А.И. Решение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости // ДАН СССР, т.XXVII, №9, 1940, с.914-916.
6. Бицадзе А.В. О местных деформациях при сжатии упругих тел. Сообщения АН Груз. ССР, т.V, №8, 1944, с.761-770.
7. Богданов А.И., Звягин А.В. Взаимодействие трещины гидроразрыва с разломом // Сб. статей «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород» к 75-летию Е.И. Шемякина, 2006, с.87-99.
8. Бородюк В.П., Вощинин А.П., Иванов А.З. Статистические методы в инженерных исследованиях. М.: Высшая школа, 1983, 216 с.
9. Гаврилкина М.В., Глаголев В.В. Модель напряженно-деформированного состояния окрестности трещины // Известия Тульского государственного университета (сер. Естественные науки), №2, 2009, с.74-89.
10. Галин Л.А. Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости // ДАН СССР, т.XXXIX, №3, 1943, с.88-93.
11. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикладная математика и механика, т.IX, №5, 1945, с.413-424.
12. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1953, 264 с.

13. Герике Б.Л., Полкунов Ю.Г., Герике П.Б. Математические модели разрушения крепких горных пород дисковым инструментом. Кемерово: Кузбассвузиздат, 2001, 171 с.
14. Гик Л.Д. Методы изучения трещин и пор горных пород на основе данных акустического каротажа // Физическая мезомеханика, т.11, №4, 2008, с.67-73.
15. Глаголев Н.И. Упругие напряжения вдоль основания плотины // ДАН СССР, т.XXXIV, №7, 1942, с.204-208.
16. Глаголев Н.И. Определение напряжений при давлении системы жестких профилей // Прикладная математика и механика, т.VII, №5, 1943, с.384-388.
17. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2001, 479 с.
18. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. О возможности искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости // Известия РАН, Механика твердого тела, №6, 2006, с.173-184.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
20. Гудман Р. Механика скальных пород. М.: Стройиздат, 1987, 232 с.
21. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970, 432 с.
22. Далматов Б.И., Бронин В.Н., Карлов В.Д. Механика грунтов. Часть 1. Основы геотехники в строительстве. М.: Издательство АСВ; СПб.: СПбГА-СУ, 2000, 204 с.
23. Дешковский В.Н., Невельсон И.С., Новокшонов В.Н. Методика определения зоны распространения техногенных трещин в угловых участках выработанного пространства // Горный журнал, №11, 2007, с.21-24.
24. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Известия АН СССР. ОТН. №5, 1955, с.3-41.
25. Заикин А.Д. Эффективное воздействие сосредоточенными силами на трещину, нормальную к границе упругой полуплоскости // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №1, 2006, с.71-75.

26. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования роста трещин гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №1, 2007, с.45-62.
27. Иванов А.З., Круг Г.К., Филаретов Г.Ф. Статистические методы в инженерных исследованиях. Регрессионный анализ. М.: МЭИ, 1977, 203 с.
28. Кашников Ю.А., Якушина Е.М., Яшихмин С.Г. Деформирование скального массива по системам трещин // Известия вузов. Горный журнал, 1992, №3, с.75-80.
29. Кибиткин В.В., Лебедева Н.А., Плешанов В.С. Выделение базовых мод разрушения при развитии усталостной трещины по смешанному типу // Физическая мезомеханика, т.7, №2, с.35-39.
30. Кожевникова М.Е., Корнев В.М. Достаточные критерии прочности и узкого выреза с закруглением в вершине при квазихрупком разрушении // Физическая мезомеханика, т.7, №5, 2004, с.47-62.
31. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987, 328 с.
32. Левин В.А., Морозов Е.М., Матрвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004, 408 с.
33. Либовиц Г. Разрушение. Том 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975, 768 с.
34. Линьков А.М. Численное моделирование движение жидкости и продвижение трещины гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №1, 2008, с.26-46.
35. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999, 382 с.
36. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. М.: Высшая школа, 1988, 239 с.
37. Методика составления геоструктурных схем (моделей) скальных массивов в основаниях гидросооружений. Пособие к СНиП 2.02.02-85. Л.: 1991, 147 с.

38. Механика контактных взаимодействий /Под ред. Воровича И.И., Александрова В.М. М.:. Физматлит, 2001, 672 с.
39. Морозов Е.М. Введение в механику развития трещин. М.: МИФИ, 1977, 91 с.
40. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Методы конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980, 256 с.
41. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984, 256 с.
42. Мосинец В.Н., А.В. Абрамов Разрушение трещиноватых и нарушенных пород. М.: Недра, 1982, 248 с.
43. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Издательство АН СССР, 1954, 647 с.
44. Мусхелишвили Н.И. Основные граничные задачи теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами // Сообщ. АН Груз ССР, т.3, №2, 1942, с.103-110.
45. Немирович-Данченко М.М., Колесников Ю.И. О различных сценариях распространения трещин в геоматериалах // Физическая мезомеханика, т.6, №1, 2003, с.33-39.
46. Николаевский В.Н. Механика деформаций и разрушения горных пород. М.: Недра, 1984, 232 с.
47. Оловянный А.Г. Математическое моделирование гидроразрыва угольных пластов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №1, 2005, с.72-79.
48. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. Том 1. Киев: Наукова думка, 1988, 486 с.
49. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: Наука, 1990, 240 с.
50. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985, 504 с.
51. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977, 312 с.

52. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел. СПб.: Профессия, 2002, 320 с.
53. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Математическая модель хрупкого разрушения геоматериалов в смешанной постановке // Вестник ОГУ, №4, 2010, с. 119-122.
54. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Численное определение коэффициентов интенсивности напряжений в задачах со смешанными краевыми условиями // Вестник СамГУ (Естественнонаучная серия), №6(72), 2009, с.118-129.
55. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Моделирование развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Вестник ОГУ, №9, 2007, с.195-198.
56. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Критерии роста трещины разрыва от различных функции нормальных перемещений точек берегов трещины // Сборник научных трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики». ВГУ. Воронеж: Научная книга, 2007, с.284-288.
57. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Моделирование развития трещины разрыва в материале, нарушенном природной трещиной // Сборник материалов всероссийской научно-практической конференции «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии». Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007, с.167-172.
58. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами // Вестник ОГУ, №5, 2008, с.111-114.
59. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Численные методы вычисления критериев роста трещин в смешанных задачах теории упругости // Вестник ОГУ, №11, 2008, с.127-131.
60. Полкунов Ю.Г., Спиридонова Е.В. Математическая модель расклинивания материала с различной длиной основной и зияющей трещины // Вестник ОГУ, №9, 2010, с.55-58.

61. Спиридонова Е.В. Программный комплекс для численного решения плоских задач теории трещин со смешанными краевыми условиями / Е.В. Спиридонова, С.В. Белобородова. Свидетельство о регистрации программного средства № 2015616382 от 09.06.2015
62. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968, 288 с.
63. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1979, 743 с.
64. Радон Дж., Ливерс П. Анализ роста трещины с использованием двух параметров: последние достижения // Физическая мезомеханика, т.2, №1-2, 1999, с.97-104.
65. Рамм А.Г., Шифрин Е.И. Проблема симметрии в задаче теории упругости о плоской трещине нормального разрыва // Прикладная математика и механика, т.69, №1, 2005, с.135-143.
66. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 432 с.
67. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1970, 492 с.
68. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970, 568 с.
69. Семинский К.Ж., Бурзунова Ю.П. Новый подход к анализу хаотической трещиноватости вблизи разломных сместителей // Геология и геофизика, т.48, №3, 2007, с.330-343.
70. Симакина Н.И., Пономарева С.А. Расчет напряженно-деформированного состоянии породного массива с учетом влияния трещин // Вестник Пермского университета, №4, 2008, с.141-144.
71. Снеддон И.Н., Бери Д.С. Классическая теория упругости. М.: ГИФМЛ, 1961, 220 с.
72. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984, 115 с.
73. Спиридонова Е.В. Моделирование развития зияющей трещины в задачах со смешанными краевыми условиями // Сборник научных трудов «Математика. Информационные технологии. Образование». Оренбург: ОГУ, 2008, с.61-64.

74. Спиридонова Е.В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений при смешанном типе нагружения трещины // Сборник трудов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (часть 2). Воронеж: ПЦ ВГУ, 2009, с.182-189.
75. Спиридонова Е.В. Алгоритм расчета коэффициентов интенсивности напряжений для разных типов задач // Сборник материалов 4-й всероссийской научно-практической конференции «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии». Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2009, с.286-292.
76. Спиридонова Е.В. Численное решение задачи о развитии трещины в смешанной постановке // Сборник тезисов научно-практической конференции «Актуальные проблемы механики, математики, информатики». ПГУ. Пермь, 2010, с.211.
77. Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Математическая модель развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Материалы международной конференции «Математическая физика и ее приложения»: Самара: ООО «Книга», 2010, с.317.
78. Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Математическая модель развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Вестник СамГТУ (Физико-математическая серия). – 2011. - №1(22). – С. 276-281.
79. Спиридонова Е.В. Математическая модель раскрытия трещины направленного разрыва в нарушенном материале // Сборник научных статей 10-ой Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование». НФИ ГОУ ВПО «КемГУ». Новокузнецк, 2010, с.71-78.
80. Спиридонова Е.В. Математические модели развития трещины в задачах со смешанной постановкой / Е.В. Спиридонова; Оренбургский государственный университет. – Оренбург, 2014. – 108 с. – Деп. В ВИНИТИ 03.07.14, № 196-В2014.
81. Спиридонова Е.В. Моделирование раскрытия берегов плоской трещины смешанного типа / Е.В. Спиридонова // Современные проблемы математики,

механики, информатики: сб. материалов международной науч. конф. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 414-420.

82. Спиридонова Е.В. Численно-аналитическое решение плоских задач теории трещин в смешанной постановке // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – №1(23). С. 39 – 49.
83. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений (под ред. Ю. Мураками, в 2-х томах). М.: Мир, 1990, т.1 – 448 с., т.2 – 1016 с.
84. Стоянов С. С. Механика формирования разрывных зон. М.: Недра, 1977, 144 с.
85. Тарасов Б.Г., Дырдин В.В., Иванов В.В., Фокин А.Н. Физический контроль массива горных пород. М.: Недра, 1994, 240 с.
86. Терпигорев А.М., Протодьяконова М.М. Разрушение углей и горных пород. М.: Углетехиздат, 1958, 427 с.
87. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979, 560 с.
88. Троллоп Д.Х., Бок Х., Бест Б.С., Уоллес К. Введение в механику скальных пород. М.: Мир, 1983, 276 с.
89. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. Основания грунтов, основания и фундаменты М.: Высшая школа, 2002, 566 с.
90. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987, 221 с.
91. Фалькович С.В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличие участков сцепления и скольжения // Прикладная математика и механика, т.IX, №5, 1945, с.425-432.
92. Фисенко Г.Л. Надежное обеспечение устойчивости бортов глубоких карьеров. Будущее горной науки. М.: Наука, 1989, с.46-54.
93. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применение. М.: Мир, 1988, 344 с.
94. Хямяляйнен В.А., Бурков Ю.В., Сыркин П.С. Формирование цементационных завес вокруг капитальных горных выработок. М.: Недра, 1994, 400 с.
95. Цытович Н.А. Механика грунтов М.: Высшая школа, 1983, 288 с.

96. Цытович Н.А., Тер-Мартиросян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. М.: Высшая школа, 1981, 317 с.
97. Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1987, 308 с.
98. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, 640 с.
99. Чернов О.И., Кю И.Г. О флюидоразрыве породных массивов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №6, 1988, с.81-92.
100. Черняк В.Г. Механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2006, 352 с.
101. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // ДАН СССР, т.XXVII, №4, 1940, с.330-334.
102. Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Известия Саратовского университета (сер. Математика. Механика. Информатика), т.9, №1, 2009, с.77-84.
103. Anderson E.M. The Dynamics of Faulting. Edinburg, 1951, 206 p.
104. Becker A.A. The boundary element method in engineering. New York: McGraw-Hill, 1992, 337 p.
105. Chinnery M.A. The dynamics of the strike slip fault // Ph. D. Thesis University of Toronto, 1962, 138 p.
106. Chinnery M.A. The stress changes that accompany strike slip faulting // Bulletin of the Seismological Society of America, v.53, №5, 1963, p.921-932.
107. Chinnery M.A., Petrak J.A. The dislocation fault model with a variable discontinuity // Tectonophysics, v.5, №6, 1968, p.513-529.
108. Elvin N., Leung K. A fast iterative boundary element method for solving closed crack problems // Engineering Fracture Mechanics, v.63, 1999, p.631-648.
109. Erban P.J. Raumliche Finite-Element-Berechnungen an idealisierten Diskontinua unter Berucksichtigung des Scher- und Dilatations-verhaltens von Trennflachen // Verof. des Institutes fur Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Verkehrswasserbau der RWTH Aachen, h/14, 1986, 217 s.

110. Goodman R.E. Methods of geological engineering in iscontinuous rocks. St. Paul: West Publish. Co., 1976, 472 c.
111. Goodman R.E., Taylor R.L., Brekke T.L. A model for the mechanics of jointed rock // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division ASCE, v.94, 1968, p.637-659.
112. Huina Yuan, Chong Peng, Qing Lin, Bingyin Zhang Simulation of tensile cracking in earth structures with an adaptive RPIM-FEM coupled Method // KSCE Journal of Civil Engineering, 2014, v.18, Issue 7, pp 2007-2018.
113. Irwin G.R. Fracturing of Metals. Cleveland: ASM, 1948, 311 p.
114. Leichnitz W. Mechanische Eigenschaften von Trennflachen im direkten Scherfersuch // Verof. des Institutes fur Bodenmechanik und Felsmechanik der YH Karlsruhe, h.89, 1975, s.58-72.
115. Lisjak A., Tatone D.S.A., Grasselli G., Vietor T. Numerical Modelling of the Anisotropic Mechanical Behaviour of Opalinus Clay at the Laboratory-Scale Using FEM/DEM / Rock Mechanics and Rock Engineering, 2014, v.47, Issue 1, pp 187-206.
116. Martel S.J. Modeling Elastic stress in Long Ridges with the Displacement Discontinuity Method // Pure and Applied Geophysics, v.157, 2000, p.1039-1057.
117. Martel S.J., Muller J.R. A Two-dimensional Boundary Element Method for Calculating Elastic Gravitational Stresses in Slopes // Pure and Applied Geophysics, v.157, 2000, p.989-1007.
118. Maruyama T. Stress fields in the neighborhood of a crack // Bulletin of the Earthquake Research Institute, v.47, №1, 1969, p.1-29.
119. Orowan E.O. Fatigue and Fracture of Metals. NY: Wiley, 1950, p.139-167.
120. Patton F. D. Multiple modes of shear failure in rock // Proc. 1-st Congress Int. Soc. Rock Mech., Lisbon, v.1, 1966, p.509-513.
121. Rossi P., Charron J.Ph., Bastien-Masse M., Tailhan J.-L., Fabrice Le Maou, Ramanich S. Tensile basic creep versus compressive basic creep at early ages: comparison between normal strength concrete and a very high strength fibre reinforced concrete // Materials and Structures, 2014, v.47, Issue 10, pp 1773-1785.

122. Scavia C. The displacement discontinuity method in the analysis of open cracks // Meccanica, v.26, №1, 1991, p.27-32.

123. Sadowsky M. Zweidimensionale Probleme der Elastizitatstheorie // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, h.8, №2, 1928, s.107-121.

124. Schultz R.A. Stress intensity factors for curved cracks obtained with the displacement discontinuity method // International Journal of Fracture, v.37, №2, 1988, p. R31-R34.

125. Wang Fei, Huang Xing-chun, Deng Jian-hua Numerical analysis of crack under compression by 3D displacement discontinuity method // Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), v.15, №3, 2010, p.297-300.

126. Yan Xiang-qiao An effective boundary element method for analysis of crack problems in a plane elastic plate // Applied Mathematics and Mechanics, 2005, v.26, Issue 6, pp 814-822.

Приложение А

Идентичность субкомбинаций смещений

Таблица П1. Идентичность субкомбинаций для D_n

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
1а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	**1(а**,в),3а,9а,11а **(-)**	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а, 11а,13б,14б,15б (-)	**1а**,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б **(-)**	4а,6а,7(б,в),12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	**1а**,3а,9а,11а **(-)**		
1б	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а ,14а (-)	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,12б (-)	4(б,в),12б (-)
	АВ	1б,9б,10а,11б (-)		4б (-)	
1в	АО	1(а.в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	**1**(а,**в**),3а,9а,11а,1 4а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	**1в (-)**	4(б,в),6б,12б (-)	4в (-)
	АВ	**1в (-)**		4в (-)	
2а	АО	2а,8а (-)	8а (-)	5а,9б,10а (-)	8б (-)
	ОВ	2а (-)		5а (-)	
	АВ	2а (-)		5а (-)	
2б	АО	2б (-)		5б (-)	
	ОВ				
	АВ				
2в,8 (в,е. и)	АО	**2в,8(в,е,и) (-)**		5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ				
	АВ				
3а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),**3а**,9а,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а, 11а,13б,14б,15б (-)	**3а**,7д,9а,11а,13б, 14б,15б (-)	4а,6а,7(б,в),12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	**3а**,9а,11а (-)		
3б	АО	3б,10б,11б,13а, 15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,12б (-)	4(б,в) (-)
	АВ	3б,11б (-)		6б,12б (-)	
4а	АО	4а,6а,12а (-)		1а,3а,9а,11а (+)	
	ОВ		**4а,**6а **(-)**	1а,3а (+)	

	АВ				
4б	АО	4б (-)		1б (+)	
	ОВ				
	АВ				
4в	АО	4в (-)		1в (-)	
	ОВ				
	АВ				
5а	АО	5а (-)		2а (+)	
	ОВ				
	АВ				
5б	АО	5б		2б (+)	
	ОВ				
	АВ				
6а	АО	4а,6а,12а (-)		1а,3а,9а,11а (+)	
	ОВ	4а,**6а (-)**		1а,3а (+)	
	АВ	4а,6а (-)			
6б	АО	6б		3б (+)	
	ОВ				
	АВ				
7а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,13б,14б,15б (-)	4а,6а,7(б,в),12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)		
7б	АО	7(б,ж),9б,10а,14а (-)	**7(б**,ж) (-)		
	ОВ	**7(б**,в,ж,и) (-)			
	АВ	**7(б**,ж) (-)			
7в	АО	**7(в**,д,и),13б,14б,15б (-)			
	ОВ	**7**(б**,в**,ж,и)			
	АВ	**7(в**,и) (-)			
7г	АО	**7г (-)**			
	ОВ				
	АВ				
7д	АО	**7**(в,**д,**и),13б,14б,15б (-)			
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,**7д**,9а,11а,13б,14б,15б (-)	4а,7б,12а (-)	
	АВ	**7д**,13б,14б,15б (-)			
7е	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	7(е,з),10б,13а,14а,15а (-)			
	АВ	7е (-)			
7ж	АО	1б,**7**(б,**ж**,з),9б,10а,14а (-)	**7**(б,**ж**) (-)	4б (-)	
	ОВ	**7**(б,в,**ж**,и) (-)			
	АВ	**7**(б,**ж**) (-)			
7з	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	

		,14а (-)			
	ОВ	7(е,з),10б,13а,14а ,15а (-)			
	АВ	7з (-)			
7и	АО	**7**(в,д,**и**),13б,14б,15б (-)			
	ОВ	**7**(б,в,ж,**и**) (-)			
	АВ	**7**(в,**и**) (-)			
8а	АО	2а,8а (-)	8а (-)	5а,9б,10а (-)	8б (-)
	ОВ	8а (-)			
	АВ				
8б	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),7(б,ж),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а, 11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,13 б,14б,15б (-)	4а,7б,12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)		
8г	АО	2в,8(в,г,д,е,и),12б (-)	2в,8(в,е,и) (-)	5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ	8г (-)		8в (+)	
	АВ				
8д	АО	8(г,д),12б (-)	8а (-)		
	ОВ	8д (-)			
	АВ				
8ж	АО	8ж (-)		8е (+)	
	ОВ		8б (-)		
	АВ				
8и	АО	2в,**8**(в,е,**и**)		5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ				
	АВ				
9а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,**9а**,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а, 11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,**9а**,11а,13 б,14б,15б (-)	6а,4а,6а,7(б,в), 12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,**9а**,11а (-)		
9б	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а ,14а (-)	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	1в (-)	4(б,в),12б (-)	4(б,в) (-)
	АВ	1б,9б,10а (-)		4б (-)	
10а	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а ,14а (-)	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	1в (-)	4(б,в),12б (-)	4(б,в) (-)
	АВ	1б,9б,10а (-)		4б (-)	
10б	АО	3б,10б,11б,13а, 15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	7(е,з),10б,13а,14а ,15а (-)			

	АВ	10б,13а,15а (-)			
11а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,**11а** (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,**11а**,13б,14б,15б (-)	4а,6а,7(б,в),12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,**11а** (-)		
11б	АО	3б,10б,11б,13а,15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а,11б (-)	1в (-)	4(б,в),12б (-)	4в (-)
	АВ	11б (-)		12б (-)	
12а	АО	4а,6а,12а (-)		1а,3а,9а,11а (+)	
	ОВ	12а (-)	4а,**12а** (-)		
	АВ		**12а** (-)		
12б	АО	2в,8(в,г,д,е,и),12б (-)	2в,8(в,еи) (-)	5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ	12б (-)			
	АВ				
13а	АО	3б,10б,11б,13а,15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	7(е,з),10б,13а,14а,15а (-)			
	АВ	10б,13а,15а (-)			
13б	АО	7(в,д,и),**13б**,14б,15б (-)			
	ОВ	1а,3а,7д,8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,**13б**,14б,15б (-)	4а,7б,12а (-)	
	АВ	7д,**13б**,14б,15б (-)			
14а	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а,14а (-)	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	
	ОВ	7(е,ж,з,и),10б,13а,14а,15а (-)	7(ж,и) (-)		
	АВ	7(ж,з),14а (-)	7ж (-)		
14б	АО	7(в,д,и),13б,**14б**,15б (-)			
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,13б,**14б,**15б (-)	4а,7б,12а (-)	
	АВ	7д,13б,**14б**,15б (-)			
15а	АО	3б,10б,11б,13а,15а (-)		6б,12б,1а,15а (-)	
	ОВ	7(е,ж,з,и),10б,13а,14а,15а (-)	7(ж,и) (-)		
	АВ	13а,15а (-)			
15б	АО	7(в,д,и),13б,14б,**15б** (-)			
	ОВ	1в,3а,7д,8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,13б,14б,**15б** (-)	4а,7б,12а (-)	
	АВ	7д,13б,14б,**15б** (-)			

Таблица П2 Идентичность субкомбинаций для D_n^g

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
1б	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е) (-)	
	ОВ		1б,3б,9б,10а (-)		
	АВ		1б,10а (-)		
2а	АО		2а (-)		
	ОВ		2а,8д (-)		
	АВ		2а (-)		
2б	АО		2б,5б,8з (-)		
	ОВ		2б,8з (-)		
	АВ				
3б	АО		3б,10б,11б,13а, 15а (-)	6б (-)	
	ОВ		1б,3б,9б,10а,11б (-)		
	АВ		3б,11б (-)		
4а	АО		4а,6а (-)		
	ОВ	**4а**,12а (-)	4а,6а,12а (-)	1а,3а (+)	
	АВ		4а,6а (-)		
4б	АО		4б,5а,6б (-)		
	ОВ		4б (-)		
	АВ				
5а	АО		4б,5а,6б (-)		
	ОВ		2а,5а,8д (-)		
	АВ		5а (-)		
5б	АО		2б,5б,8з (-)		
	ОВ		5б (-)		
	АВ				
6а	АО		4а,6а (-)		
	ОВ	4а,**6а** (-)	4а,6а (-), 8ж (+)	1а,3а (+)	
	АВ		4а,6а (-)		
6б	АО		4б,5а,6б (-)		
	ОВ		6б (-)		
	АВ				
7а	АО		7(а,е) (-)	7(г,д),13б,14б,15б (-)	
	ОВ		7а (-)		
	АВ				
7д	АО	**7**(в,**д**,и),13б,14б,15б (-)			
	ОВ	**7д**,8б,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б (-)	7б (-)	
	АВ	**7д**,13б,14б,15б (-)			
7е	АО		7(а,е) (-)	7(г,д),13б,14б,15б (-)	
	ОВ		7е,10б,13а (-)		
	АВ		7е (-)		

7з	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е) (-)	
	ОВ		7з,10б,13а (-)		
	АВ		7з (-)		
8а	АО	2а,8(г,д),12б (-)	8а (-)	5а (-)	
	ОВ				
	АВ				
8б	АО		8б (-)	8а (+)	
	ОВ	8ж (-)			
	АВ				
8(в, е,и)	АО	2в,**8(в**,е,и) (-)		5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ				
	АВ				
8д	АО		8д (-)		
	ОВ		2а,5а,8д (-)		
	АВ		8д (-)		
8ж	АО		8ж (-)	1а,3а,9а,11а (-)	
	ОВ	4а (+)	8ж (-), 6а (+)		
	АВ				
8ж	АО		8ж (-)		
	ОВ			1а,3а,9а,11а (-)	
	АВ				
8з	АО		2б,5б,8з (-)		
	ОВ		2б,8з (-)		
	АВ		8з (-)		
9б	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е),10б,13а (-)	
	ОВ		9б,10а,11б (-)		
	АВ		9б,10а (-)		
10а	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е),10б,13а (-)	
	ОВ		9б,10а,11б (-)		
	АВ		9б,10а (-)		
10б	АО		3б,10б,11б,13а, 15а (-)	6б,15а (-)	
	ОВ		7(е,з),10б,13а (-)		
	АВ		10б,13а (-)		
11б	АО		3б,10б,11б,13а, 15а (-)	6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ		9б,10а,11б (-)		
	АВ		11б (-)		
12а	АО		12а (-)		
	ОВ	**12а** (-)			
	АВ				
13а	АО		3б,10б,11б,13а, 15а (-)	6б,15а (-)	
	ОВ		7(е,з),10б,13а (-)		
	АВ		13а (-)		
13б	АО	7(в,д,и),**13б**,14б,15б (-)			
	ОВ	7д,8б,**13б**,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б (-)	7б (-)	

	АВ	7д,**13б**,14б,15б (-)	7д,13б,14б,15б (-)		
14а	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е),10б,13а (-)	
	ОВ		14а,15а (-)		
	АВ		14а (-)		
14б	АО	7(в,д,и),13б,**14б**,15б (-)			
	ОВ	7д,8б,13б,**14б**,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б (-)	7б (-)	
	АВ	7д,13б,**14б**,15б (-)			
15а	АО	3б (-)	3б,10б,11б,13а, 15а (-)	6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ		14а,15а (-)		
	АВ		15а (-)		
15б	АО	7(в,д,и),13б,14б,**15б** (-)			
	ОВ	7д,8б,13б,14б,**15б** (-)	1а,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б (-)	7б (-)	
	АВ	7д,13б,14б,**15б** (-)			

Таблица П3. Идентичность субкомбинаций для D_s

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
1а	АО	4а,6а,12а (+)		1а,3а,9а,11а (-)	
	ОВ		4а,6а (+)	1а,3а (-)	
	АВ			1а,3а (-)	
1б	АО	4б (-)		1б (-)	
	ОВ				
	АВ				
1в	АО	4в (-)		**1в** (-)	
	ОВ				
	АВ				
2а	АО	5а (-)		2а (-)	
	ОВ				
	АВ				
2б	АО	5б (-)		2б (-)	
	ОВ				
	АВ				
3а	АО	4а,6а,12а (+)		1а,3а,9а,11а (-)	1а,9а,11а (-)
	ОВ		4а,6а (-)	1а,3а (-)	
	АВ				
3б	АО	6б (+)		3б (-)	
	ОВ				
	АВ				
4а	АО	1(а,в),3а,7(а,е), 8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	**4(а**,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а ,11а,13б,14б.15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а, 13б,14б,15б (-)	4а,6а,7(б,в),12а (-)	

	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)		
4б	АО	1б,7(б,ж,з),9б,10а,14а (-)	7(б,ж) (-)	4б,7з,10б,13а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а,11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,12б (-)	**4(б**,в),12б (-)
	АВ	1б,9б,10а (-)		**4б**, 12б (-)	
4в	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	**4**(а,**в**),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а,11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,12б (-)	**4в** (-)
	АВ	1в (-)		**4в (-)**	
5а	АО	2а,8а (-)	8а (-)	5а,9б,10а (-)	8б (-)
	ОВ	2а (-)		5а (-)	
	АВ				
5б	АО	2б (-)		5б (-)	
	ОВ				
	АВ				
5в, 8(г, ж,и)	АО	2в,8(в,е,и) (-)		5в,8(г,ж,и) (-)	
	ОВ				
	АВ				
6а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),**6а**,7(б,ж),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,6а,7(б,в,д),12а,13б,14б,15б (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)		4а,6а,7б,12а (-)	
6б	АО	3б,10б,11б,13а,15а (-)	10б,11б,13а,15а (-)	6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а,11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,7а,12б (-)	4в,**6б**,7а (-)
	АВ	3б,11б (-)		6б,12б (-)	
7а	АО		1б,7з,9б,10а,14а (-)	7(а,е),10б,13а (-)	
	ОВ			6б,**7а** (-)	
	АВ			7а (-)	
7б	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),**7(б**,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а,11а,13б,14б,15б (-)	1а,3а,7д,9а,11а,13б,14б,15б (-)	4а,6а,7(б,в),12а (-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,7(б,в),12а (-)	
7в	АО			**7**(б,**в**,г,д,ж,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,8б,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,6а,7(б,в,д),12а,13б,14б,15б (-)	
	АВ			7(б,в,д),13б,14б,15б (-)	
7г	АО			**7**(в,**г**,д,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ			**7г** (-)	
	АВ				

7д	АО			**7**(в,г,**д**,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,9а,11а (-)	9а,11а (-)	4а,6а,7(в,д),12а, 13б,14б,15б (-)	
	АВ			7(в,д),13б,14б, 15б (-)	
7е	АО	1б,7з,9б,10а (-)	7з,9б,10а,14а (-)	4б,7(а,е,з),10б,13 а (-)	
	ОВ			7е (-)	
	АВ				
7ж	АО	1(а,в),3а,7(а,е), 9б,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),**7**(б,в,**ж**,и),12а (-)	
	ОВ			**7ж (-)**	
	АВ				
7з	АО	1б,7(ж,з),9б,10а, 14а (-)	7ж (-)	4б,7(е,з),10б,13а (-)	
	ОВ			7з (-)	
	АВ				
7и	АО			**7**(б,в,г,д,ж,**и**),13б,14б,15б (-)	
	ОВ			**7и (-)**	
	АВ				
8а	АО		8б (+)	8а (-)	
	ОВ				
	АВ				
8б	АО			8б (-)	
	ОВ		8г (-)		
	АВ				
8в	АО			8(в,д) (-)	
	ОВ	8г (+)		8в (-)	
	АВ				
8д	АО			8в,8д (-)	
	ОВ			8д (-)	
	АВ			8д (-)	
8е	АО	8ж (+)		**8е (-)**	
	ОВ			8е (-)	
	АВ				
9а	АО	4а,6а,12а (+)		1а,3а,9а,11а (-)	
	ОВ	6а (+)	8ж (-)	9а,11а (-)	
	АВ				
9б,10а	АО	2а,8а (-)		5а,9б,10а (-)	8б (-)
	ОВ			9б,10а (-)	
	АВ				
10б	АО	1б,7з,9б,10а,14а (-)		4б,7(е,з),10б,13а (-)	
	ОВ			10б,13а,14а (-)	
	АВ			10б,13а (-)	
11а	АО	4а,6а,12а (+)		1а,3а,9а,11а (-)	1а,9а (-)
	ОВ	6а (+)	8ж (-)	9а,11а (-)	
	АВ				
12а	АО	1(а,в),3а,7(а,е), 8б,9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),**12а** (-)	
	ОВ	1а,3а,7(а,д),8б,9а	1а,3а,7д,9а,11а,	4а,6а,7(б,в),12а	

		,11а,13б,14б,15б (-)	13б,14б,15б (-)	(-)	
	АВ	1а,3а,7а,8б,9а, 11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)		
12б	АО	3б,10б,11б,13, 15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ	1(б,в),3б,9б,10а, 11б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,**12б** (-)	
	АВ	3б,11б (-)		6б,12б (-)	
13а	АО	1б,7з,9б,10а,14а (-)		4б,7(е,з),10б,13а (-)	
	ОВ			10б,13а,14а (-)	
	АВ			10б,13а (-)	
13б	АО			7(в,г,д,и),**13б**,14б,15б (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,6а,7(в,д),12а, 13б,14б,15б (-)	
	АВ			7(в,д),13б,14б,15 б (-)	
14а	АО	3б,10б,11б,13а, 15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ			10б,13а,14а (-)	
	АВ			14а (-)	
14б	АО			7(в,г,д,и),13б,**14б**,15б (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,6а,7(в,д),12а, 13б,14б,15б (-)	
	АВ			7(в.д),13б,14б,15 б (-)	
15а	АО	3б,10б,11б,13а, 15а (-)		6б,12б,14а,15а (-)	
	ОВ			15а (-)	
	АВ				
15б	АО			7(в,г,д,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ	1а,3а,7а,9а,11а (-)	1а,3а,9а,11а (-)	4а,6а,7(в,д),12а, 13б,14б,15б (-)	
	АВ			7(в,д),13б,14б, 15б (-)	

Таблица П4. Идентичность субкомбинаций для D_s^g

Субкомби-нация		Идентичные компоненты			
		D_n	D_n^g	D_s	D_s^g
1а	АО	12а (+)			1а,3а,9а,11а (-)
	ОВ				
	АВ				
1б	АО				1б,2а,3б (-)
	ОВ				1б (-)
	АВ				
2а	АО				1б,2а,3б (-)
	ОВ				2а (-)

	АВ				
2б	АО				2б,8з (-)
	ОВ				2б,5б,8з (-)
	АВ				2б,8з (-)
2в	АО				2в (-)
	ОВ				2в,5в,8(г,ж,и) (-)
	АВ				2в (-)
3а	АО				1а,3а,9а,11а (-)
	ОВ				
	АВ				
3б	АО				1б,2а,3б (-)
	ОВ				3б (-)
	АВ				
4а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	**4(а**,в),6а,7(б,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ				4а (-)
	АВ				
4б	АО				4б,7з (-)
	ОВ	1б,9б,10а,11б (-)		**4б (-)**	4б,6б,12б (-)
	АВ				4б (-)
5а	АО				5а,8(в,д),9б,10а, 11б (-)
	ОВ				5а (-)
	АВ				
5б	АО				5б (-)
	ОВ				2б,5б,8з (-)
	АВ				5б (-)
5в,8 (г,ж ,и)	АО				5в,8(г,ж,и) (-)
	ОВ				2в,5в,8(г,ж,и) (-)
	АВ				5в,8(г,ж,и) (-)
6а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),**6а**,7(б,ж),12а (-)	
	ОВ				6а (-)
	АВ				
6б	АО				6б (-)
	ОВ	1б (-)		4б,12б (-)	4б,6б,7а,12б (-)
	АВ				6б (-)
7а	АО				7а (-)
	ОВ	1(б,в),3б (-)	1в (-)	4(б,в),6б,**7а**,12б (-)	4в,6б,7а,12б (-)
	АВ				7а (-)
7б	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),**7(б**,в,ж,и),12а (-)	
	ОВ				7б,12а (-)
	АВ				
7в	АО			**7**(б,**в**,г,д,жи),13б,14б,15б (-)	
	ОВ				7в (-)
	АВ				
7д	АО			**7**(в,г,**д**,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ				7д (-)
	АВ				
7е	АО				7е (-)

	ОВ				7е,15а (-)
	АВ				7е (-)
7з	АО				4б,7з (-)
	ОВ				7з,10б,13а,14а (-)
	АВ				7з (-)
8а	АО				8а (-)
	ОВ				8а,8е (-)
	АВ				8а (-)
8б	АО	2а,8а (-)	8а (-)	5а,9б,10а (-)	8б (-)
	ОВ				
	АВ				
8в	АО				5а,8(в,д),9б,10а, 11б (-)
	ОВ	8г (+)		**8в (-)**	
	АВ				8в (-)
8д	АО				5а,8(в,д),9б,10а, 11б (-)
	ОВ				8д (-)
	АВ				
8е	АО	8ж (+)		**8е (-)**	
	ОВ				8(а,е) (-)
	АВ				8е (-)
8з	АО				2б,8з (-)
	ОВ				2б,5б,8з (-)
	АВ				2б,8з (-)
9а	АО	12а (+)			1а,3а,9а,11а (-)
	ОВ				
	АВ				
9б,10а	АО				5а,8(в,д),9б,10а, 11б (-)
	ОВ				9б,10а (-)
	АВ				
10б	АО				10б,13а (-)
	ОВ				7з,10б,13а,14а, 15а (-)
	АВ				10б (-)
11а	АО				1а,3а,9а,11а (-)
	ОВ				
	АВ				
11б	АО				5а,8(в,д),9б,10а, 11б (-)
	ОВ				11б (-)
	АВ				
12а	АО	1(а,в),3а,7(а,е),8б, 9а,11а (-)	1(а,в),3а,9а,11а (-)	4(а,в),6а,7(б,в,ж,и),**12а** (-)	
	ОВ				7б,12а (-)
	АВ				12а (-)
12б	АО				12б,14а,15а (-)
	ОВ	1б,3б (-)		4б,**12б** (-)	4б,6б,12б (-)
	АВ				12б (-)
13а	АО				10б,13а (-)

	ОВ				7з,10б,13а,14а, 15а (-)
	АВ				10б,13а (-)
13б	АО			7(в,г,д,и),**13б**,14б,15б (-)	
	ОВ				13б (-)
	АВ				
14а	АО				14а (-)
	ОВ				7з,10б,13а,14а, 15а (-)
	АВ				14а (-)
14б	АО			7(в,г,д,и),13б,**14б**,15б (-)	
	ОВ				14б (-)
	АВ				
15а	АО				12б,15а (-)
	ОВ				7(е,з),10б,13а,14а ,15а (-)
	АВ				15а (-)
15б	АО			7(в,г,д,и),13б,14б,15б (-)	
	ОВ				15б (-)
	АВ				

Приложение В

Программный комплекс моделирования раскрытия трещины

Количественный анализ

unit Variables;

```
interface

type
  mas=array of extended;
  mas2=array of mas;

var
  M:integer;                  {количество граничных элементов на участке АО}
  n_OB:integer;               {количество граничных элементов на участке ОВ}
  n_CD:integer;               {количество граничных элементов на трещине А’В’}
  N:integer;                  {количество всех граничных элементов}
  AO:extended;                {длина участка АО}
  L:extended;                 {длина участка ОВ}
  BH:extended;                {расстояние до наклонной трещины А’В’}
  CD:extended;                {длина трещины А’В’}
  alfa:extended;              {угол наклона трещины А’В’}
  E:extended;                 {модуль Юнга}
  v:extended;                 {коэффициент Пуассона}
  G:extended;                 {модуль сдвига}
  d1:extended;                {константа d1=1/(4*π*(1-v));}
  us1,un1:extended;           {касательные и нормальные смещения на участке АО}
  Sigs1,Sign1:extended;       {касательные и нормальные напряжения на участке АО}
  us2,un2:extended;           {касательные и нормальные смещения на участке ОВ }
  Sigs2,Sign2:extended;       {касательные и нормальные напряжения на участке ОВ}
  ro:extended;                {плотность материала}
  gy:extended;                {ускорение свободного падения}
  x,y:mas;                    {координаты граничных элементов}
  beta:mas;                   {угол наклона граничного элемента к оси Ох}
  a:mas;                      {половина длины граничного элемента}
  Ds,Dn:mas;                  {касательные и нормальные разрывы смещений}
  check1,check2,check3,check4:boolean;  {индикаторы выбора граничных условий на АО, если
включен, то истина, в противном случае - ложь}
  check5,check6,check7,check8:boolean;  {индикаторы выбора граничных условий на ОВ }
  check9:boolean;                       {индикатор учета гравитационных сил}
  check10:boolean;                      {индикатор учета функции нормальных смещений}
  check11:boolean;                      {индикатор нарушенности материала}

implementation

end.
```

unit Input;

```
interface
```

```
{...}
implementation

uses Error, Main, Output, Input_Function, Input_crack;

{$R *.dfm}

procedure TForm2.FormCreate(Sender: TObject);   {создание окна ввода входных данных, формирование схемы трещины}
{...}
procedure TForm2.Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);  {запрет неправильного ввода значений}
{...}
{выбор граничных условий}
procedure TForm2.CheckBox1Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox2Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox3Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox4Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox5Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox6Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox7Click(Sender: TObject);
{...}
procedure TForm2.CheckBox8Click(Sender: TObject);
{...}
{учет действия гравитационных сил}
procedure TForm2.CheckBox9Click(Sender: TObject);
{...}
{выбор граничного условия с заданной функцией нормальных смещений на АО}
procedure TForm2.CheckBox10Click(Sender: TObject);
{...}
{учет нарушенности материала наклонной трещиной}
procedure TForm2.CheckBox11Click(Sender: TObject);
{...}
{изменение схемы постановки задачи в соответствии с выбором граничных условий}
procedure TForm2.Edit1Change(Sender: TObject);    {ввод касательных смещений на АО}
{...}
procedure TForm2.Edit2Change(Sender: TObject);    {ввод касательных напряжений на АО}
{...}
procedure TForm2.Edit3Change(Sender: TObject);    {ввод нормальных смещений на АО}
{...}
procedure TForm2.Edit4Change(Sender: TObject);    {ввод нормальных напряжений на АО}
{...}
procedure TForm2.Edit5Change(Sender: TObject);    {ввод касательных смещений на ОВ}
{...}
procedure TForm2.Edit6Change(Sender: TObject);    {ввод касательных напряжений на ОВ}
{...}
```

```
procedure TForm2.Edit7Change(Sender: TObject);    {ввод нормальных смещений на ОВ}
{...}
procedure TForm2.Edit8Change(Sender: TObject);    {ввод нормальных напряжений на ОВ}
{...}
procedure data_validation:boolean; {проверка корректности входной информации}
{...}
procedure TForm2.Button1Click(Sender: TObject);
begin
if not(data_validation) then  {если информация введена некорректно, то выход}
   exit;
border;                    {разбивка трещины на граничные элементы}
base;                      {формирование системы линейных уравнений}
{очистка окна вывода}
Form3.Chart1.Series[1].Clear;
Form3.Chart1.Series[2].Clear;
Form3.Edit1.Visible:=false;
Form3.Label1.Visible:=false;
Form3.K1.Enabled:=true;
Form3.K2.Enabled:=true;
output_Dn(M+1,M+n_OB);    {вывод нормальных разрывов смещений на участке ОВ}
if Form2.CheckBox11.Checked then
  Form3.RadioButton5.Visible:=true
else
  Form3.RadioButton5.Visible:=false;
Form3.ShowModal;
end;

procedure TForm2.Button2Click(Sender: TObject);
begin
Form4.ShowModal;          {открыть окно для ввода параметров нарушения}
end;

procedure TForm2.Button3Click(Sender: TObject);
begin
Form1.ShowModal;           {открыть окно для задания функции нормальных смещений}
end;

end.
```

unit Main;

```
interface

uses
  Formulas, Variables, Input_Function;
{…}
var
  Dsn:mas;
  matr_A: mas2; {основная матрица СЛАУ}
  stolb_b:mas;    {столбец правой части СЛАУ}
```

```
implementation

procedure border; {разбивка на граничные элементы}
var
i:integer;
begin
Setlength(x,N+1);
Setlength(y,N+1);
Setlength(a,N+1);
Setlength(beta,N+1);
for i:=1 to M do
   begin
   a[i]:=AO/M/2;
   beta[i]:=0;
   x[i]:=-AO+a[i]+2*a[i]*(i-1);
   y[i]:=0;
   end;
for i:=M+1 to M+n_OB do
   begin
   a[i]:=L/n_OB/2;
   beta[i]:=0;
   x[i]:=a[i]+2*a[i]*(i-M-1);
   y[i]:=0;
   end;
for i:=M+n_OB+1 to N do
   begin
   a[i]:=CD/n_CD/2;
   beta[i]:=alfa;
   x[i]:=L+BH+(-CD/2+a[i]+2*a[i]*(i-M-n_OB-1))*cos(beta[i]);
   y[i]:=(-CD/2+a[i]+2*a[i]*(i-M-n_OB-1))*sin(beta[i]);
   end;
end;

function linear(koef_a,koef_b,value:extended):extended; {линейная функция}
{…}
function parabolic(koef_a,koef_b,koef_c,value:extended):extended; {параболическая функция}
{…}
function function_un(value:extended):extended; {функция нормальных смещений на участке AO}
{…}
procedure base; {формирование и решение СЛАУ}
var
i,j:integer;
begin
{формирование СЛАУ в зависимости от заданных граничных условий}
{задаем размеры массивов, нумерация элементов начинается с 0, нулевые элементы не исполь-
зуем}
Setlength(matr_A,2*N+1,2*N+1);  {размер основной матрицы 2N*2N}
Setlength(stolb_b,2*N+1);       {размер правой части 2N}
Setlength(Dsn,2*N+1);           {размер вектора неизвестных 2N}
{формирование основной матрицы СЛАУ}
for i:=1 to N do
   begin
```

```
for j:=1 to N do
   begin
   {на участке АО}
   if check1 then    {если задано касательное смещение}
     if i<=M then
       begin
       matr_A[i,j]:=Bss(i,j);            {первое уравнение СЛАУ}
       matr_A[i,j+N]:=Bsn(i,j)
       end;
   if check2 then    {если задано касательное напряжение}
     if i<=M then
       begin
       matr_A[i,j]:=Ass(i,j);            {второе уравнение СЛАУ}
       matr_A[i,j+N]:=Asn(i,j);
       end;
   if (check3)or(check10) then   {если задано нормальное смещение}
     if i<=M then
       begin
       matr_A[i+N,j]:=Bns(i,j);            {третье уравнение СЛАУ}
       matr_A[i+N,j+N]:=Bnn(i,j);
       end;
   if check4 then         {если задано нормальное напряжение}
     if i<=M then
       begin
       matr_A[i+N,j]:=Ans(i,j);            {четвертое уравнение СЛАУ}
       matr_A[i+N,j+N]:=Ann(i,j);
       end;
   {на участке ОВ}
   if check5 then              {если задано касательное смещение}
     if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
       begin
       matr_A[i,j]:=Bss(i,j);            {первое уравнение СЛАУ}
       matr_A[i,j+N]:=Bsn(i,j)
       end;
   if check6 then                {если задано касательное напряжение}
     if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
       begin
       matr_A[i,j]:=Ass(i,j);            {второе уравнение СЛАУ}
       matr_A[i,j+N]:=Asn(i,j);
       end;
   if check7 then                  {если задано нормальное смещение}
     if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
       begin
       matr_A[i+N,j]:=Bns(i,j);            {третье уравнение СЛАУ}
       matr_A[i+N,j+N]:=Bnn(i,j);
       end;
   if check8 then                    {если задано нормальное напряжение}
     if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
       begin
       matr_A[i+N,j]:=Ans(i,j);            {четвертое уравнение СЛАУ}
       matr_A[i+N,j+N]:=Ann(i,j);
       end;
```

```
    {на участке A'B', если материал нарушен}
    if check11 then
      if i>M+n_OB then
        begin
        matr_A[i,j]:=Ass(i,j);                    {второе уравнение СЛАУ}
        matr_A[i,j+N]:=Asn(i,j);
        matr_A[i+N,j]:=Ans(i,j);                  {четвертое уравнение СЛАУ}
        matr_A[i+N,j+N]:=Ann(i,j);
        end;
    end;
{формирование правой части СЛАУ}
{на участке AO}
if check1 then              {если задано касательное смещение}
  if i<=M then
    stolb_b[i]:=us1;
if check2 then              {если задано касательное напряжение}
  if i<=M then
    if check9 then
      stolb_b[i]:=Sigs1-v/(1-v)*ro*gy*abs(-AO-x[i])
    else stolb_b[i]:=Sigs1;
if check10 then             {если задана функция нормальных смещений}
  begin
  if i<=M then
    begin
    stolb_b[i+N]:=-function_un(x[i]);
    end
  end
else
  if check3 then            {если задано нормальное смещение}
    if i<=M then
      stolb_b[i+N]:=un1;
if check4 then              {если задано нормальное напряжение}
  if i<=M then
    stolb_b[i+N]:=Sign1;
{на участке OB}
if check5 then              {если задано касательное смещение}
  if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
    stolb_b[i]:=us2;
if check6 then              {если задано касательное напряжение}
  if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
    if check9 then          {если присутствуют гравитационные силы}
      stolb_b[i]:=Sigs2-v/(1-v)*ro*gy*abs(-AO-x[i])
    else stolb_b[i]:=Sigs2;
if check7 then              {если задано нормальное смещение}
  if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
    stolb_b[i+N]:=un2;
if check8 then              {если задано нормальное напряжение}
  if (i>M)and(i<=M+n_OB) then
    stolb_b[i+N]:=Sign2;
{на участке A'B', если материал нарушен}
if check11 then
  if i>M+n_OB then
```

```
        begin
        stolb_b[i]:=0;              {касательное напряжение равно 0}
        stolb_b[i+N]:=0;            {нормальное напряжение равно 0}
        end;
   end;
solve_SLAE(matr_A,stolb_b,Dsn,2*N);   {решение СЛАУ, на выходе получаем вектор разрывов
смещений Dsn}
Setlength(Ds,N+1);
Setlength(Dn,N+1);
for i:=1 to n do
   begin
   Ds[i]:=Dsn[i]; {записываем первые N элементов в массив касательных разрывов смещений}
   Dn[i]:=Dsn[i+N]; {записываем остальные N элементов в массив ннормальных разрывов сме-
щений}
   end;
end;

end.
```

unit Output;

```
interface
{…}
implementation

uses Variables, Input, Formulas, math, Input_approx;

{$R *.dfm}

procedure output_Ds(n1,n2:integer);   {вывод касательных разрывов смещений на экран, n1 – но-
мер начальной точки, n2 – номер конечной точки}
{…}
procedure output_Dn(n1,n2:integer);   {вывод нормальных разрывов смещений на экран, n1 – но-
мер начальной точки, n2 – номер конечной точки }
{…}
procedure find_R2(f,f_appr:mas;N_t:integer);  {нахождение коэффициента достоверности аппрок-
симации}
{…}
procedure find_del(f,f_appr:mas;N_t:integer); {нахождение погрешности аппроксимации}
{…}
procedure approximate(degr_p:integer;bool_del,bool_R2:boolean);   {нахождение параметров ап-
проксимирующей функции по методу наименьших квадратов, degr_p – степень полинома,
bool_del – индикатор вывода погрешности аппроксимации, bool_R2 – индикатор вывода коэф-
фициента достоверности аппроксимации}
{…}
procedure TForm3.CheckBox1Click(Sender: TObject); {вывод графика разрывов смещений по мо-
дулю}
{…}
procedure TForm3.Close(Sender: TObject; var Action: TCloseAction);  {возврат на окно ввода дан-
ных, очистка окна вывода результатов}
{…}
procedure TForm3.K1Click(Sender: TObject);    {интерполяция кубическими сплайнами}
```

```
{…}
procedure TForm3.K2Click(Sender: TObject);
begin
Form5.ShowModal;        {открыть окно для ввода параметров аппроксимации}
end;

{вывод результатов в соответствии выбранными смещениями}
procedure TForm3.RadioButton1Click(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm3.RadioButton2Click(Sender: TObject);
{…}
{вывод результатов в соответствии выбранной областью}
procedure TForm3.RadioButton3Click(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm3.RadioButton4Click(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm3.RadioButton5Click(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm3.RadioButton6Click(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm3.S1Click(Sender: TObject);   {сохранение схемы раскрытий в файл}
{…}
procedure TForm3.S2Click(Sender: TObject); {сохранение таблицы раскрытий в файл}
{…}

end.
```

unit Formulas;

```
interface

uses Math, Variables, Input;
{…}
implementation

procedure solve_SLAE(a:mas2;b,x:mas;NN:integer); {метод Гаусса решения СЛАУ, a – основная
матрица СЛАУ, b – правая часть СЛАУ, x – вектор неизвестных, NN- размер СЛАУ}
{…}
{функции для расчета основной матрицы СЛАУ, i,j – строка и столбец, на пересечении которых
расположен элемент}
function Ass(i,j:integer):extended;
{…}
function Asn(i,j:integer):extended;
{…}
function Bss(i,j:integer):extended;
{…}
function Bsn(i,j:integer):extended;
{…}
function Bns(i,j:integer):extended;
{…}
function Bnn(i,j:integer):extended;
```

```
{…}
function Ans(i,j:integer):extended;
{…}
function Ann(i,j:integer):extended;

end.
```

Анализ идентичности

```
unit main;

interface
{…}
type
mas=array of real;
mas2=array of mas;
mas_int=array of integer;

const
event:mas_str=('1а','1б','1в','2а','2б','2в','3а','3б','4а','4б','4в',
        '5а','5б','5в','6а','6б','7а','7б','7в','7г','7д','7е','7ж','7з','7и',
        '8а','8б','8в','8г','8д','8е','8ж','8з','8и','9а','9б','10а','10б',
        '11а','11б','12а','12б','13а','13б','14а','14б','15а','15б');
displ:mas_str2=('Dn','Dng','Ds','Dsg');
{…}
function max_mas(mas_:mas):real;   {поиск максимального элемента в массиве mas}

var
  Form1: TForm1;
  n: integer;     {номер выбранной задачи}
  m,N_kol: integer;    {количество элементов участке АО и на всей трещине АВ          соответственно}
  proc: real;                  {максимально допустимый процент отклонения подобных случаев}
  Dn,Dng,Ds,Dsg: mas2; {массивы раскрытий}
  D1,D2,D: mas2;           {массивы раскрытий на участке АО, ОВ и всей трещине АВ}
  x: mas;                      {массив координат элементов}
  sim1,sim2,sim3,sim4,sim5,sim6:mas_int; {массивы с номерами подобных случаев на участке АО, ОВ и всей трещине}

implementation

{$R *.dfm}

function max_mas(mas_:mas):real; {поиск максимального элемента в массиве}

procedure analysis(D_:mas2;kol:integer;StrGr1,StrGr2:TStringGrid; var sim_1,sim_2:mas_int); {поиск подобий, D_ - массив раскрытий, kol – количество точек, StrGr1,StrGr2 – таблицы вывода подобий, sim_1,sim_2 – номера подобных случаев}
var
i,k:integer;
kol_minus, kol_plus:integer; {количество полных и зеркальных совпадений}
delta_minus,delta_plus:mas; {массивы отклонений}
```

```
similar_minus,similar_plus:array of integer;  {массивы с номерами подобных случаев}
begin
Setlength(delta_minus,kol+1);
Setlength(delta_plus,kol+1);
kol_minus:=0;
kol_plus:=0;
Setlength(similar_minus,0);
Setlength(similar_plus,0);
for k:=1 to 192 do
   begin
   for i:=1 to kol do
      begin
      if D_[i,k]=0 then
        begin
        if D_[i,n]=0 then
          begin
          delta_minus[i]:=0;
          delta_plus[i]:=0;
          end
        else
          begin
          delta_minus[i]:=proc+100;
          delta_plus[i]:=proc+100;
          end;
        end
      else
        begin
        delta_minus[i]:=abs((D_[i,k]-D_[i,n])/D_[i,k]*100);        {полное подобие}
        delta_plus[i]:=abs((D_[i,k]+D_[i,n])/D_[i,k]*100);         {зеркальное подобие}
        end;
      end;
   if max_mas(delta_minus)<=proc then
     begin
     kol_minus:=kol_minus+1;
     Setlength(similar_minus,kol_minus+1);
     similar_minus[kol_minus]:=k;
     end;
   if max_mas(delta_plus)<=proc then
     begin
     kol_plus:=kol_plus+1;
     Setlength(similar_plus,kol_plus+1);
     similar_plus[kol_plus]:=k;
     end;
   end;
if Length(similar_minus)=0 then
  begin
  StrGr_Clear(StrGr1);
  end
else
  begin
  StrGr1.ColCount:=Length(similar_minus)-1;
  StrGr1.RowCount:=2;
```

```
  for i:=1 to Length(similar_minus)-1 do
     begin
     StrGr1.Cells[i-1,0]:=displ[(similar_minus[i]-1) div 48 +1];
     StrGr1.Cells[i-1,1]:=event[similar_minus[i]-((similar_minus[i]-1) div 48)*48];
     end;
  end;
if Length(similar_plus)=0 then
  begin
  StrGr_Clear(StrGr2);
  end
else
  begin
  StrGr2.ColCount:=Length(similar_plus)-1;
  StrGr2.RowCount:=2;
  for i:=1 to Length(similar_plus)-1 do
     begin
     StrGr2.Cells[i-1,0]:=displ[(similar_plus[i]-1) div 48 +1];
     StrGr2.Cells[i-1,1]:=event[similar_plus[i]-((similar_plus[i]-1) div 48)*48];
     end;
  end;
Setlength(sim_1,Length(similar_minus));
Setlength(sim_2,Length(similar_plus));
for i:=1 to Length(similar_minus)-1 do
   sim_1[i]:=similar_minus[i];
for i:=1 to Length(similar_plus)-1 do
   sim_2[i]:=similar_plus[i];
end;

procedure StrGr_Clear(StrGr:TStringGrid); {очистка таблиц}
{…}
procedure read_data; {считывание данных из файла}
{…}
procedure paint_grafik(D_:mas2; kol:integer; StrGr1,StrGr2:TStringGrid; sim_1,sim_2:mas_int;
Chart_:TChart);   {построение графика, D_ - массив раскрытий, kol – количество точек,
StrGr1,StrGr2 – таблицы подобий, sim_1,sim_2 – номера подобных случаев, Chart_ - область вы-
вода графика}
{…}
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
read_data;  {чтение данных}
{анализ на участке AO}
analysis(D1,m,Form1.StringGrid1,Form1.StringGrid4,sim1,sim2);
paint_grafik(D1,m,Form1.StringGrid1,Form1.StringGrid4,sim1,sim2,Form1.Chart1);
{анализ на участке OB}
analysis(D2,N_kol-m,Form1.StringGrid3,Form1.StringGrid2,sim3,sim4);
paint_grafik(D2,N_kol-m,Form1.StringGrid3,Form1.StringGrid2,sim3,sim4,Form1.Chart2);
{анализ на всей трещине AB}
analysis(D,N_kol,Form1.StringGrid5,Form1.StringGrid6,sim5,sim6);
paint_grafik(D,N_kol,Form1.StringGrid5,Form1.StringGrid6,sim5,sim6,Form1.Chart3);
end;

{выбор номера задачи}
```

```
procedure TForm1.ComboBoxEx1Change(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm1.ComboBoxEx2Change(Sender: TObject);
{…}
procedure TForm1.ComboBoxEx3Change(Sender: TObject);
{…}

end.
```