ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Лаптева Анастасия Александровна

Распространение деформаций по упругим средам с дополнительными ограничениями в их механических свойствах

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
чл.-корр. РАН Буренин А.А.

Владивосток — 2014

Содержание

Введение

Одной из основных целей современной механики деформирования является создание математических моделей, описывающих механические свойства реальных материалов. Экспериментальные исследования показывают [31, 59, 77, 109], что зависимость между напряжениями и деформациями у многих природных и конструкционных материалов, подвергаемых динамическому воздействию, существенно отличается от линейной.

Монография Ф.Д. Мурнагана [151] является одной из первых работ, полностью посвященных нелинейной теории упругости. Более детальное изучение основ нелинейной теории упругости принадлежит Л.И. Седову [116–118], В.В. Новожилову [100], В. Прагеру [108], Д. Бленду [8, 143–145], А.И. Лурье [84], Р.С. Ривлину [152], С.К. Годунову [30], Д.Д. Ивлеву [54–56], Л.А. Толоконникову [121], М.А. Био [142], Г. Каудереру [58], И.И. Гольденбланту [32] и др.

В 60-70-х годах прошлого века появились работы Д. Бленда [8], Е.М. Черных [130–132], А.Д. Чернышева [135], Чжу-Бо-Те [146, 147], Г.Ф. Филатова [51, 124–126], посвященные изучению распространения ударных волн (поверхностей сильных разрывов) с учетом нелинейных эффектов. Д. Бленд рассмотрел на примере плоских волн в адиабатическом приближении условия существования ударных волн в упругой среде при линеаризации определяющей системы уравнений. Им проводилось изучение ударных волн в переменных Лагранжа, предполагая отсутствие предварительных деформаций. Также были рассмотрены продольные ударные волны со сферической симметрией. Д. Блендом исследовались цилиндрические продольные волны в случае изэнтропи-

ческого приближения в недеформированной среде [8]. Им была показана невозможность существования чисто поперечных ударных волн в случае плоских ударных волн в недеформированной упругой среде; указана возможность существования ударных волн круговой поляризации (на этой волне не меняется модуль сдвиговых деформаций). Чжу-Бо-Те исследовал особенности распространения ударных волн в несжимаемых упругих средах [146,147]. Он впервые получил замкнутую систему уравнений в разрывах, вычислил скорости распространения ударных волн в зависимости от предварительных деформаций, разрывов касательного напряжения и деформаций. На примере идеальной несжимаемой резины им было получено условие существования ударной волны нагрузки, как следствие термодинамических ограничений на возможные разрывы. Е.М. Черных [130–132] рассмотрел условия существования ударных волн в среде, подчиняющейся закону Гука, но допускающей большие деформации. Такая геометрически нелинейная модель получалась при замене в законе Гука тензора малых деформаций на тензор деформаций Альманси, учитывая нелинейность в кинематических соотношениях. Позже для такой же модели Г.Ф. Филатовым [51, 124–126] и А.Д. Чернышевым [135] были получены условия существования ударных волн с учетом предварительных деформаций, а также скорости распространения возможных типов ударных волн.

С начала 70-х годов XX века вследствие отказа от многих ограничений, в рамках которых проводились исследования новые значительные результаты были получены А.А. Бурениным и А.Д. Чернышевым [17, 20]. Определяющие соотношения выбираются в более общей форме. Изучены условия существования продольных, квазипродольных

ударных волн, вычислены скорости их распространения, проведен термодинамический анализ необратимого процесса производства энтропии на ударной волне, вследствие которого для нелинейной упругой среды был получен аналог теоремы Цемплена (о существовании ударных волн сжатия в идеальном газе).

В 80-е годы значительные результаты в исследовании распространения плоских волн в деформированной упругой среде удалось получить А.Г. Куликовскому и Е.И. Свешниковой [63, 67–70, 114]. Ими было проведено замкнутое исследование условий существования и закономерностей распространения плоских ударных волн, изучены условия эволюционности разрывов на плоскости. Исследования проводились на основе девяти константной теории упругости в переменных Лагранжа. Э.В. Ленский [80–82] в своих исследованиях проделал подобную работу для упругой среды с упругим потенциалом, состоящим из двух слагаемых, каждое из которых зависело только от одного (первого или второго) инварианта тензора деформаций. Работы перечисленных авторов сделали изучение плоских ударных волн в нелинейно-упругих средах завершенной областью математической физики.

Следует отметить ряд работ других ученых [12, 78, 79], посвященные исследованию проблем распространения ударных волн в несжимаемых упругих средах.

Изучение процессов ударного деформирования в более сложных средах принадлежит А.Г. Куликовскому [64], Е.И. Свешниковой [115], Х. Хану [128].

Среди нелинейных механических свойств особо следует отметить неодинаковый по модулю деформационный отклик материалов на при-

ложение различной по знаку нагрузки. Таким свойством, называемым разномодульностью, обладает множество микронеоднородных и микроразрушенных сред [7, 85, 99, 112]. Различие в модуле Юнга при сжатии и растяжении стержня достигает для конструкционных сталей 5%, алюминия – 10%, чугуна – 20% и выше [31, 59, 77]. Особенно значительно это различие проявляется у природных и композитных материалов [24, 33]. Эта особенность механических свойств, присущая материалам с микронеоднородностями и микронарушениями сплошности, приводит к возникновению специфических эффектов в процессах деформирования упругих сред, которые не отмечаются классическими теориями.

При деформировании микродефекты сплошности нарушают изотропию прочностных и деформационных свойств среды, что особенно характерно в окрестности свободного состояния (открытие и закрытие каверн и трещин, сингулярная нелинейность контактных свойств между фракциями гетерогенных и композитных материалов).

Влияние микронеоднородностей можно учесть на основе вычисления эффективных характеристик (эффективных упругих модулей, параметров повреждаемости и т.п.) прочностных свойств материалов, чему и посвящены работы отечественных ученых Т.Д. Шермергора [141], В.В. Дудукаленко и В.А. Минаева [50], А.В. Чигарева [136], В.В. Болотина и В.М. Москаленко [11], Г.Ф. Филатова [127]. Влияние микроразрушенности материалов пытались учесть путем вычисления эффективных прочностных параметров на основе предположений о геометрии разрушенности (ширины раскрытия трещин, контактных особенностей по берегам трещин, ориентации и распределения трещин в материале и др.) Капустянский С.М. [57], Руппенейт К.В. [110] и др.

В первых работах, посвященных непосредственно моделированию сред с сингулярным поведением в окрестностях свободного состояния [3–5, 140, 148], авторы в качестве основы использовали модель линейного упругого тела. Однако закон Гука изменяли таким образом, что упругим постоянным присваивались разные значения в зависимости от знака напряжений. Поскольку напряжение является тензорной характеристикой, то возникала неоднозначность выбора инвариантов напряжений, по знакам которых определяются значения упругих постоянных. Это привело к разнообразию обобщения классической теории на разномодульный случай.

В моделях разносопротивляющейся упругой среды [28, 83, 92–95, 106, 120, 123, 129] полагалось наличие некоторой произвольной зависимости упругих постоянных от характера деформированного или напряженного состояний. В.М. Панферов [106] предложил считать модуль сдвига некоторой функцией отношения объемной деформации к интенсивности деформаций, а модуль всестороннего сжатия также некоторой произвольной функцией знака объемной деформации. Введенные в определяющие модельные соотношения функции предлагалось определять с помощью экспериментов. Ю.Н. Работнов и Е.В. Ломакин [83] рассматривали упругий потенциал зависящим от таких же произвольных функций. Наличие произвола в моделях, связанного с неопределенностью в выборе подобных функций, делали их свободными от неточностей предыдущих моделей. Однако для всех моделей необходима конкретизация постулируемых зависимостей по данным экспериментов.

А.А. Золочевский [52, 53] предложил потенциал деформаций для разномодульной упругой среды, зависящий не от вида напряженного

состояния, реализуемого в теле при деформировании, а от некоторого эквивалентного. Модель включает в себя три постоянных материала и удовлетворяет требованию изотропии. К недостаткам модели следует отнести то обстоятельство, что она в одноосном случае при уменьшении разницы между упругими модулями при растяжении и сжатии не переходит в классическую модель изотропной упругой среды.

В работе [113] предложены конкретные модели для изотропных упругих сред с разными упругими постоянными при растяжении и сжатии. Механические свойства среды задаются выбранным видом упругого потенциала, в котором постоянные определяются знаком следа тензора напряжений и еще некоторого дополнительного параметра, связанного с видом напряженного состояния. Таким образом, модельными соотношениями можно воспользоваться при решении конкретных задач только в том случае, если имеется возможность определить необходимые дополнительные параметры вида напряженного состояния еще до решения задачи по каким-либо внешним признакам. Часто это сделать невозможно.

Существует еще целый ряд подходов к определению разномодульных свойств материалов, например, с помощью реологических схем [112], путем особого разложения в ряд упругого потенциала среды [99] или использованием кусочно-линейных инвариантов напряжений [23].

В.П. Мясниковым в работе [96] для моделирования явления разного сопротивления материалов растяжению и сжатию было предложено выбрать в качестве упругого потенциала функцию, неаналитическую в окрестности свободного состояния, в которой первые два слагаемых в правой части выписанного соотношения определяют классическую

упругую среду, а последнее слагаемое является добавкой, связанной с микроразрушенностью материалов и определяющей их сопротивление при сжатии и растяжении. Особенности данной модели изучались позднее в работах [29, 35, 86–88, 97, 101]. В.П. Мясниковым и А.И. Олейниковым [98, 102, 103] было показано, что слагаемые типа последнего в такой зависимости получаются при разложении функции упругого потенциала в ряд относительно свободного состояния по сферическим функциям. Данная зависимость определяет изотропную упругую среду, обладающую разной реакцией на растяжение и сжатие. Построенную на основе этого соотношения систему уравнений в дальнейшем стали называть моделью Мясникова-Олейникова. А.И. Олейниковым проведена значительная работа [103] по разработке методик определения значений постоянных материала в такой зависимости по данным экспериментов. Получены значения таких постоянных для достаточно широкого класса природных материалов, экспериментальные данные по которым оказались доступными. Необходимо отметить, что предложенные методики доведены до пользовательских компьютерных программ, позволяющих вычислить постоянные материала по данным эталонных экспериментов.

Особое положение в обзоре работ по свойствам ударных волн в кусочно-линейных упругих средах занимают работы А.Г. Куликовского и Л.А. Пекуровской [65, 66]. В данной работе впервые рассмотрены плоские ударные и простые волны в разномодульной упругой среде, изучены ограничения на возможные разрывы, следующие из условия их эволюционности и термодинамики.

Свойства системы уравнений, которые имеют особенность при нулевых значениях искомых функций, в разномодульной упругой среде

изучались В.П. Масловыим и П.П. Мосоловым в [90]. Построена общая теория решений данной системы уравнений, описывающих движение изотропной среды, имеющей различные упругие постоянные при одноосных напряженных состояниях. Изучались условия существования и закономерности распространения возможных одномерных разрывов производной градиента перемещений. В данном простейшем случае рассмотрены задачи о распаде разрыва, об отражении волны сжатия от свободной границы, о разрывах, приводящих к нарушению сплошности, о падении разреженной системы в поле силы тяжести на жесткое основание. Отметим, что в силу одномерности рассмотренных задач в [90, 91] рассматриваются только продольные составляющие разрывов (продольные ударные волны). Наличие сингулярности поведения разномодульного материала в окрестности свободного состояния затрудняет исследование таких сред. Даже в случае, когда система модельных уравнений сводится к одному соотношению и искомая функция зависит только от одной пространственной переменной [90], решение задачи не сводится к задачам классической математической физики.

Высокоскоростные процессы изготовления и упрочнения изделий такие, как штамповка, ковка, пробивание точных отверстий в конструкционных элементах, сварка взрывом и другие проводится с ударным воздействием на материал. Решение краевых задач ударного деформирования связано, в первую очередь, с необходимостью определения волновых картин, распространяющихся по деформируемому материалу, особенностей взаимодействия волновых фронтов с преградами и между собой. В этом случае процессы распространения деформаций изменения формы и объема оказываются взаимозависимыми, а разрывы деформа-

ций комбинированными [8, 22, 51, 67, 71].

Когда основным интересом являются закономерности распространения по среде деформаций изменения формы, а изменение объема любого элемента деформируемого тела невозможно, то деформируемую среду полагают несжимаемой, что существенно упрощает анализ [12]. Идеализированная модель несжимаемой нелинейно-упругой среды достаточно хорошо описывает поведение ряда реальных материалов, например, каучукоподобные материалы. Проблема постановки и методы решения обобщенных нестационарных задач динамики несжимаемых упругих сред относится к актуальным в современной механике.

В основном решались автомодельные задачи. Такие решения задач динамики деформирования твердых тел, несмотря на значительные накладываемые ограничения, оказываются очень полезными. Их решение дает сведения, которые необходимо учитывать уже на стадии постановки более сложных, неавтомодельных задач. Более того, автомодельные решения могут быть использованы в этих задачах в качестве начальных приближений.

Еще в середине 70-х годов прошлого века Д. Блендом [8] была решена автомодельная задача с ударной волной постоянной интенсивности. Решения автомодельных задач динамики нелинейно упругой среды приведены в работах [1, 2, 13, 17–19, 21, 27, 49, 70, 89, 130, 130, 137, 138]. Огромный интерес ученых вызвали автомодельные задачи в упругопластической среде [6, 9, 10, 25, 60–62, 107, 111, 119]. Плоские автомодельные задачи при условии пластичности Мизеса рассмотрены в работах Г.Г. Блейха с соавторами [9, 10]. Г.И. Быковцевым [25] изучалось отражение сдвиговой волны в двумерной постановке, рассмотренное далее

для различных сред в [6].

В последнее время решаются автомодельные задачи, у которых в модель твердого тела включены эффекты, обусловленные дисперсией волн, анизотропией и вязкостью среды [72–74,115,137,139]. Автомодельные движения разномодульной упругой среды изучались в [14, 34].

В работе [149, 150] С.Н.Гаврилова на основе модели Мясникова-Олейникова решаются задачи об одномерном движении точек среды разномодульного упругого материала на примере продольных колебаний стержня.

Таким образом, приведенный здесь обзор публикаций, не претендующий на полноту и законченность, демонстрирует несомненную актуальность исследований, предпринятых в диссертации. Основная поставленная в работе цель – изучение свойств поверхностей разрывов деформаций в нелинейных упругих средах с неклассическими свойствами (нелинейной несжимаемостью, неодинаковым сопротивлением растяжению-сжатию и разнонаправленным сдвигам) позволяет получить необходимые сведения для корректной постановки и решения нестационарных краевых задач ударного деформирования, которые, в свою очередь, могут служить тестовыми для разработки приближенных методов расчета ударно-волновых процессов в технологической практике обработки материалов взрывом, штамповкой, ковкой.

В первой главе содержатся теоретические сведения, необходимые для моделирования нестационарных процессов в упругих телах. В первом параграфе приведены основные соотношения математической модели динамического деформирования изотропной упругой среды в случае адиабатического приближения.

Во втором параграфе приведены основные модельные соотношения рассматриваемых в диссертации нелинейно-упругих изотропных сред. Первый пункт посвящен несжимаемой нелинейно-упругой среде. Во втором пункте рассматривается математическая модель разномодульной изотропной упругой среды [96] с упругим потенциалом, учитывающим взаимное влияние объемных и сдвиговых деформирований (дилатацию). В случае сферической симметрии упругий потенциал, предложенный в [96] существенно усложняет определяющие соотношения. С целью избежать возникающие сложности в третьем пункте приводится измененный вид упругого потенциала, позволяющий избавиться в модельных соотношениях от эффекта дилатации. В четвертом пункте приведены соотношения изотропной несжимаемой упругой среды в случае сдвиговой разномодульности.

В третьем параграфе первой главы вводится определение поверхностей слабых и сильных разрывов. Приведены условия совместности (геометрические, кинематические, динамические и термодинамическое), накладывающие определенные ограничения на изменение величин, претерпевающих разрыв на движущихся волновых фронтах.

В четвертом параграфе на основе определяющих соотношений модели несжимаемой упругой среды проведен анализ системы уравнений, связывающей разрывы компонент градиента вектора перемещений точек среды на ударной волне и скорость самой волны. Условия разрешимости такой системы при известных предварительных деформациях и движении среды перед волной позволили записать условия существования возможных типов ударных волн при деформировании несжимаемой нелинейно-упругой среды – волны сдвиговой нагрузки, увеличивающей

модуль предварительного сдвига, и волны круговой поляризации [71], разворачивающей предварительный сдвиг в соответствии с заданным граничным воздействием.

В пятом параграфе первой главы получены возможные скорости движения плоскостей сильных и слабых разрывов при одноосном деформировании разномодульной упругой среды. Приведена классификация обобщенных решений квазилинейного одномерного уравнения движения, подобная принятой в [90] .

Вторая глава посвящена постановкам и решению ряда автомодельных краевых задач динамики деформирования несжимаемой упругой среды. Рассматриваются простейшие задачи одномерного взаимодействия двух идущих навстречу друг другу плоских сдвиговых ударных волн, поляризованных в различных плоскостях. Показано, что при столкновении сдвиговые волны порождают две группы отраженных волновых фронтов, движущихся в противоположных направлениях. Получены аналитические решения задачи для каждого возможного случая: отражение четырех ударных волн, движущихся попарно в противоположных направлениях; отражение двух противоположно направленных пакетов, состоящих из простой волны Римана и ударной волны каждый; отражение комбинированных пакетов, когда в одном направлении движутся две ударные волны, а в другом – простая волна Римана и ударная волна. Для обоснования корректности каждой постановки краевой задачи проводится анализ динамических условий совместности разрывов и термодинамики на волновых фронтах.

В третьей главе проведена постановка и получены аналитические решения ряда нестационарных краевых задач одноосного ударного де-

формирования упругой среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию: о возникновении ударной волны при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства; о возникновении покоящейся области постоянных перемещений при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства; об отражении плоских одномерных волн сжатия и разрежения от жестко закрепленной границы разномодульного упругого слоя; о плоской одномерной волне сжатия и разрежения, падающей на свободную границу разномодульного упругого слоя. Показано, что граничные возмущения могут приводить к возникновению ударных волн, движущихся слоев недеформированной среды. Здесь же рассмотрены аналогичные краевые задачи ударного деформирования среды с разномодульным сопротивлением сдвигу вдоль выбранной оси.

Четвертая глава посвящена изучению особенностей построения обобщенных решений краевых задач ударного деформирования разномодульного упругого материала в случае сферической симметрии. Получены аналитические решения краевых задач о возникновении сходящихся и расходящихся волн при последовательном всестороннем сжатии-растяжении (растяжении-сжатии) сферических границ.

Заключение содержит краткий обзор полученных результатов.

В главах диссертации используется двойная нумерация формул, первый номер обозначает номер главы. На протяжении всей главы нумерация сквозная. Рисунки и графики помещены в текст. Нумерация рисунков сквозная по всему тексту.

Основные результаты диссертации опубликованы в [15, 16, 36–48, 75, 76].

1. Основные уравнения моделей динамически деформируемой изотропной нелинейно-упругой среды

1.1 Система определяющих соотношений динамически деформируемой упругой среды

Движение точки некоторого выделенного объема V в процессе деформирования будем изучать в декартовой системе координат в переменных Эйлера. Такое движение в произвольный момент времени задается функциями

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t), \tag{1.1}$$

где a_i – материальные (лагранжевы) координаты, x_i – пространственные (эйлеровы) координаты точки среды, t – время. Здесь и в дальнейшем латинские индексы принимают значения $1, 2, 3$.

Примем гипотезу о сплошности деформируемой среды, благодаря чему можно ввести вектор перемещений точек среды с компонентами

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) = x_i - a_i. \tag{1.2}$$

Компоненты вектора скорости перемещений точек среды υ_i связаны с компонентами вектора перемещений соотношениями

$$\upsilon_i = \dot{u}_i + \upsilon_j u_{i,j}, \tag{1.3}$$

а компоненты вектора ускорений

$$\omega_i = \dot{\upsilon}_i + \upsilon_j \upsilon_{i,j}. \tag{1.4}$$

Здесь индексом после запятой обозначена частная производная от функции по соответствующей пространственной координате x_i $(f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i})$,

точкой – частная производная функции по времени $(\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t})$. Также принято правило суммирования по повторяющимся индексам $(\upsilon_i u_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{3} \upsilon_i u_{i,j})$.

Твердые тела под воздействием внешних и внутренних сил в той или иной степени могут менять свой объем и форму. Ограничимся рассмотрением таких воздействий на тела, которые не приводят к необратимому изменению объема и формы, т.е. изучать будем упругое деформирование сплошной среды.

В качестве меры деформаций примем тензор конечных деформаций Альманси с компонентами

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - a_{k,i}a_{k,j}\right),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. С учетом (1.2) компоненты α_{ij} можно записать в форме

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right). \tag{1.5}$$

Тензор скоростей деформаций ε_{ij} связан с тензором деформаций Альманси α_{ij} соотношениями [108, 116]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i}\right) = \frac{d\alpha_{ij}}{dt} + \upsilon_{m,i}\alpha_{mj} + \upsilon_{m,j}\alpha_{mi}.$$

Для выбранного деформируемого объема V, ограниченного поверхностью Ω, необходимо выполнение законов сохранения массы, импульса, энергии, которые в интегральной форме имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\upsilon_i dV = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}n_j d\Omega, \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{\upsilon_j\upsilon_j}{2}+E\right)dV=\int\limits_\Omega\left(\sigma_{ij}\upsilon_i n_j-q_j n_j\right)d\Omega. \tag{1.8}$$

Здесь ρ – плотность среды в текущем состоянии, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера, n_j – внешняя единичная нормаль к поверхности Ω, q_j – компоненты вектора теплового потока, E – плотность распределения внутренней энергии.

Соотношения (1.6) – (1.8), если входящие в них функции непрерывны и дифференцируемы в объеме V, приводят в локальной формулировке к уравнениям

– неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\upsilon_j)_{,j}=0, \tag{1.9}$$

– движения

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_j\upsilon_{i,j}\right)=\sigma_{ij,j}, \tag{1.10}$$

– баланса энергии

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\upsilon_j E_{,j}\right)=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-q_{j,j}. \tag{1.11}$$

Уравнение неразрывности (1.9) будем использовать в форме Лагранжа [32]

$$\begin{gathered}\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-2I_1+2I_1^2-2I_2-\frac{4}{3}I_1^3+4I_1I_2-\frac{8}{3}I_1^3\right)^{1/2},\\ I_1=\alpha_{ii},\qquad I_2=\alpha_{ij}\alpha_{ji},\qquad I_3=\alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji},\end{gathered} \tag{1.12}$$

где ρ_0 – плотность среды в недеформированном состоянии, I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора деформаций.

Термодинамическими параметрами системы, участвующей в процессе деформирования, являются абсолютная температура T и компоненты тензора деформаций α_{ij}. Из первого начала термодинамики

следует уравнение баланса энтропии $S = S(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$\rho T \frac{dS}{dt} + q_{j,j} = 0.$$

Примем, что изменение состояния упругой среды происходит адиабатически ($S = \text{const}$). В этом случае процессы поглощения или потери тепла и процесс теплопередачи происходят существенно более медленно, чем процесс распространения деформаций. Тогда абсолютная температура T является единственным внутренним параметром среды. Внешними параметрами среды являются компоненты тензора деформаций α_{ij} , а функциями состояния – свободная энергия Ψ , внутренняя энергия E и энтропия S .

В рамках принятого адиабатического приближения в качестве функции состояния вместо плотности внутренней энергии $E(S, \alpha_{ij})$ будем использовать упругий потенциал W , зависящий только от компонент тензора деформаций:

$$W(\alpha_{ij}) = \rho_0 E(S, \alpha_{ij}), \qquad S = \text{const}. \tag{1.13}$$

Среду будем считать изотропной, поэтому упругий потенциал W можно считать зависящим только от инвариантов тензора деформаций $W = W(I_1, I_2, I_3)$. Потенциал W определяет механические свойства деформируемого материала, вид этой функции определяется эмпирически.

Соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений и тензора деформаций, являются наряду с уравнением баланса энтропии следствием первого закона термодинамики. В случае принятых ограничений они записываются в форме Мурнагана [151]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}). \tag{1.14}$$

Постулируя функцию $W(I_1, I_2, I_3)$, получаем замкнутую систему уравнений (1.1)-(1.5), (1.10), (1.12), (1.14), описывающую динамическое деформирование изотропной упругой среды, допускающей изменение объема. Вид функции $W(I_1, I_2, I_3)$ определяет механические свойства моделируемого материала.

1.2 Модели изотропных упругих сред

1.2.1 Несжимаемая упругая среда

Налагая на упругую среду запрет на изменение объемных деформаций ($\rho = \rho_0$), из локальной формулировки закона сохранения массы (1.9) запишем условие несжимаемости

$$\upsilon_{j,j} = 0, \tag{1.15}$$

или, используя уравнение неразрывности в форме Лагранжа (1.12), получим

$$I_1 - I_1^2 + I_2 + \frac{2}{3}I_1^3 - 2I_1I_2 + \frac{4}{3}I_1^3 = 0. \tag{1.16}$$

Из условия неразрывности в форме (1.16) следует, что в несжимаемой упругой среде только два инварианта тензора деформаций линейно независимы, а третий может быть вычислен через них. Тогда функцию $W(I_1, I_2)$ возможно разложить в ряд Маклорена в окрестности свободного состояния:

$$W(I_1, I_2)=(a-\mu)I_1+aI_2+bI_1^2-\eta I_1I_2-\theta I_1^3+cI_1^4+dI_2^2+\chi I_1^2I_2+\ldots \tag{1.17}$$

Поскольку в несжимаемой упругой среде всегда $I_1 < 0$ и $I_2 > 0$, то в (1.17) поставлены знаки "минус" с той целью, чтобы все постоянные материала $\mu, a, b, \zeta, \theta, \ldots$ были положительными. Постоянную μ

следует отождествлять с модулем сдвига упругой среды, другие постоянные являются упругими модулями более высокого порядка.

В формулу Мурнагана (1.14) для несжимаемой упругой среды следует ввести неизвестную функцию добавочного гидростатического давления P:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}). \tag{1.18}$$

Если в (1.18) учесть зависимость (1.17), то получаем следующую связь напряжений с деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\left\{\mu - (\zeta + 2b)u_{k,k} + \frac{\zeta + 2b}{2} r_{kk} + (\zeta + 2d)e_{st}e_{ts}\right\} e_{ij} - \\ - \{\mu - (\zeta + 2b)u_{k,k}\} r_{ij} - 4(a - \zeta u_{k,k})e_{im}e_{mj} + \\ + 2a(r_{im}e_{mj} + e_{im}r_{mj}) + \ldots, \\ 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \qquad r_{ij} = u_{k,i}u_{k,j}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Рассмотрим частный случай движения точек несжимаемой упругой среды. Положим, что компоненты вектора перемещений (1.2) зависят только от одной пространственной координаты x_1:

$$u_i = u_i(x_1, t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad u_1 = 0, \tag{1.20}$$

т.е. будем изучать движение точек среды при одномерном деформировании несжимаемого изотропного упругого материала.

Из условия несжимаемости (1.15) следует, что $u_{k,k} = 0$. В случае одномерного деформирования $u_{1,1} = 0$, а ненулевыми остаются компоненты градиента перемещений $u_{2,1} \neq 0$ и $u_{3,1} \neq 0$.

Ненулевые компоненты тензора напряжений (1.19) в этом случае

принимают значения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = -P - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k m^k, \\
&\sigma_{i1} = u_{i,1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k m^k, \qquad (i = 2, 3), \\
&m = u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где коэффициенты γ_k, β_k полностью определяются упругими постоянными среды:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \mu, \qquad \gamma_1 = a + b + d + \zeta, \qquad \ldots, \\
&\beta_1 = \mu + a, \qquad \ldots
\end{aligned}$$

Уравнение движения (1.10) с учетом (1.21) для одномерного деформирования несжимаемой среды принимает вид соотношений

$$\begin{aligned}
&P_{,1} - \sum_{k=1}^{\infty} 2k\beta_k m^{2k-1} m_{,1} = 0, \\
&\sigma_{i1,1} = \rho \ddot{u}_i, \qquad (i = 2, 3).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

1.2.2 Изотропная упругая среда с различным сопротивлением растяжению и сжатию

Для описания свойств изотропного упругого материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, Мясниковым В.П. было предложено задавать упругий потенциал W в виде функции, неаналитической в окрестности свободного состояния [96, 105]:

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 \sqrt{I_2} + \ldots \tag{1.23}$$

Здесь λ, μ – параметры Ламэ, ν – упругий модуль, который отражает наличие микродефектов в материале (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы). Если опустить в

(1.23) последнее слагаемое, то приходим к классической линейной теории упругости. Многоточием в (1.23) обозначены другие возможные слагаемые. А.И. Олейниковым [99, 102, 104] было показано, что такие слагаемые можно рассматривать в качестве первых членов разложения функции $W(I_1, I_2, I_3)$ в ряд по сферическим функциям. В работе ограничимся наиболее простым случаем, учитывая только три выписанных в (1.23) слагаемых.

Подставив упругий потенциал (1.23) в формулу Мурнагана (1.14) и считая деформации малыми, получаем связь компонент тензора напряжений с компонентами тензора малых деформаций e_{ij}:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{\nu}{r}\right) J_1 \delta_{ij} + (2\mu - \nu r) e_{ij}, \\ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \\ r = \frac{J_1}{\sqrt{J_2}}, \qquad J_1 = e_{kk}, \qquad J_2 = e_{ik} e_{ki}.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Соотношения (1.3), (1.10), (1.12), (1.23) с учетом принятого допущения о малости деформаций будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\upsilon_i = \dot{u}_i, \\ \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - u_{k,k} + \ldots, \\ \sigma_{ij,j} = \rho \dot{\upsilon}_i,\end{gathered} \tag{1.25}$$

при этом считаем, что массовые силы равны нулю.

Таким образом, соотношения (1.23)–(1.25) составляют замкнутую систему уравнений модели изотропной упругой среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию.

Рассмотрим частный случай движения точек упругой среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию. Пусть только одна

компонента u_1 вектора перемещений отлична от нуля:

$$u_1(x_1, t) = u(x, t), \qquad u_2 = u_3 = 0, \tag{1.26}$$

т.е. движение точек среды происходит при условии одноосного деформирования.

В этом случае у тензора малых деформаций остается только одна ненулевая компонента:

$$e_{11} = e = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Соответственно, главные инварианты тензора деформаций имеют вид:

$$J_1 = e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad J_2 = e_{11}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{1.28}$$

Упругий потенциал (1.23) в случае одноосного деформирования можно записать в форме

$$\begin{gathered} W = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu - k\nu\right) e^2, \\ k = \mathrm{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0, \\ -1 & \text{при } e < 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{1.29}$$

а соотношения (1.24) приводят к кусочно-линейной зависимости между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma$ и деформациями $e_{11} = e$ (рис.1, a):

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2k\nu\}e. \tag{1.30}$$

Очевидно, что в зависимости (1.30) коэффициент пропорциональности между σ и e имеет различные значения при растяжении $(e > 0)$ и сжатии $(e < 0)$. Точка $e = 0$ является особой. При постоянном значении k во всей области деформирования зависимость (1.30) становится линейной (рис.1, b).

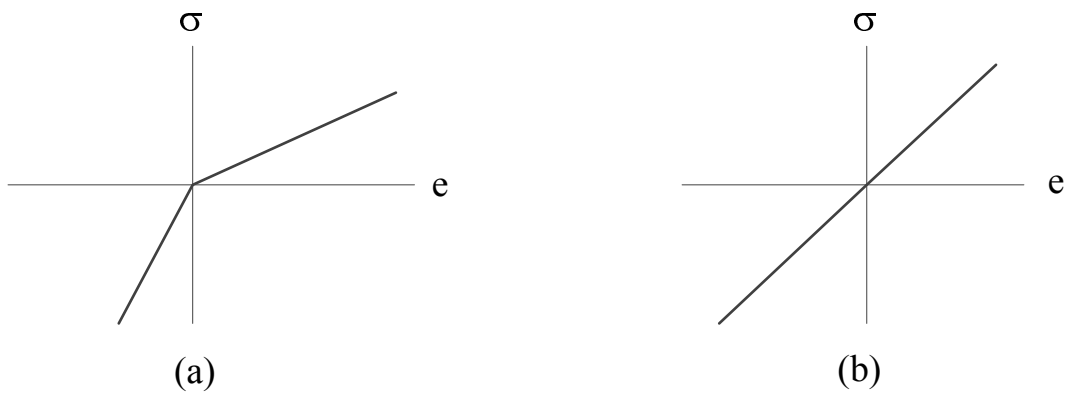


Рис. 1. Диаграмма " $\sigma - e$ " в случае одноосного деформирования изотропной упругой среды: а) разномодульная упругая среды; б) линейная упругая среда

При одноосном деформировании справедливо уравнение движения, полученное из (1.10):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1.31}$$

Фазовая скорость c уравнения (1.31) может принимать различные значения в зависимости от характера деформирования.

Введем обозначения

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu + 2\nu}{\rho}, \qquad b^2 = \frac{\lambda + 2\mu - 2\nu}{\rho}, \tag{1.32}$$

причем будем считать $a > b$ при $0 < \nu < \lambda/2 + \mu$. Тогда $c = a$ в тех областях, где происходит сжатие среды, $c = b$ при растяжении среды.

Решение уравнения движения (1.31) можно представить в форме д'Аламбера:

$$\begin{gathered} u(x,t) = f(\xi) + g(\eta), \\ \xi = t - \frac{x}{c}, \qquad \eta = t + \frac{x}{c}. \end{gathered} \tag{1.33}$$

Неизвестные функции $f(\xi(x,t))$ и $g(\eta(x,t))$ определяются для каждой конкретной краевой задачи в соответствии с заданными краевыми и начальными условиями.

1.2.3 Модель разномодульной упругой среды в случае сферической симметрии

В случае сферической симметрии упругий потенциал (1.23) существенно усложняет определяющие соотношения модели, поскольку описывает разномодульные дилатирующие среды. Это обстоятельство, не влияющее на решение плоских одномерных задач, проявляется при переходе к криволинейным координатам и не позволяет воспользоваться известными результатами исследований одномерного уравнения движения, записанного для случая сферической симметрии $u_r = u(r,t)$, $u_\varphi = u_\theta = 0$:

$$c^2\left(u_{,rr} + 2\frac{u_{,r}}{r} - 2\frac{u}{r^2}\right) = \ddot{u}. \tag{1.34}$$

Для устранения данного неудобства воспользуемся отличной от (1.23) формулой упругого потенциала разномодульной среды [84], исключающей эффект дилатации из модельных соотношений [43]:

$$W = \frac{\lambda}{2}J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1|J_1|. \tag{1.35}$$

Коэффициенты λ, μ, ν имеют смысл, аналогичный модели (1.23). Использование знаковой функции от первого инварианта J_1 тензора деформаций позволяет учитывать только объемную разномодульность, исключая возможное влияние сдвигов. В случае одномерных движений точек среды и распространения плоских поверхностей разрывов потенциал (1.35) приводит к такой же зависимости (1.30) между напряжениями и деформациями, что и модель (1.23).

Записанные в сферических координатах инварианты тензора деформаций

$$J_1 = e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{\theta\theta}, \qquad J_2 = e_{rr}^2 + e_{\varphi\varphi}^2 + e_{\theta\theta}^2$$

с учетом выражений для его компонент:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = u_{,r}\,, \qquad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

примут вид:

$$\begin{gathered} J_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = u_{,r} + 2\frac{u}{r}, \\ J_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{r}\right)^2 = {u_{,r}}^2 + 2\frac{u^2}{r^2}. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Компоненты тензора напряжений в случае сферической симметрии запишем из (1.35) с учетом (1.36) в предположении о малости деформаций:

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = \frac{\partial W}{e_{rr}} = \lambda J_1 + 2\mu e_{rr} - 2\nu J_1 \mathrm{Sign} J_1 = \\ = \lambda\left(u_{,r} + 2\frac{u}{r}\right) + 2\mu u_{,r} - 2\nu \mathrm{Sign} J_1 \left(u_{,r} + 2\frac{u}{r}\right) = \\ = (\lambda - 2\nu \mathrm{Sign} J_1)\left(u_{,r} + 2\frac{u}{r}\right) + 2\mu u_{,r}\,, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = (\lambda - 2\nu \mathrm{Sign} J_1)\left(u_{,r} + 2\frac{u}{r}\right) + 2\mu\frac{u}{r}, \\ \mathrm{Sign}(J_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } J_1 > 0, \\ -1 & \text{при } J_1 < 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{1.37}$$

Уравнение движения (1.10), в случае сферической симметрии принимающее вид

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\ddot{u},$$

с учетом (1.37) может быть записано в форме

$$\begin{gathered} c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{u}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ c^2 = \frac{\lambda + 2\mu - 2\nu \mathrm{Sign}(J_1)}{\rho}, \end{gathered} \tag{1.38}$$

сохранившей волновой сферический оператор в левой части равенства, что не может быть достигнуто в рамках модели (1.23). Так же, как и в уравнении (1.31), фазовая скорость c уравнения движения (1.38)

может принимать различные значения в зависимости от характера протекающего процесса деформирования, но, в отличие от модели (1.23), здесь знак перед коэффициентом ν определяется не просто градиентом перемещений, а знаком первого инварианта $J_1 = \dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\dfrac{u}{r}$ в целом. Отсюда следует, что переход от состояния $J_1 > 0$ к состоянию $J_1 < 0$ (или наоборот) и возникновение сопровождающих такой переход специфических эффектов, присущих разномодульной среде, может достигаться при всевозможных соотношениях между значениями градиента $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, перемещения u и радиуса r. Данное обстоятельство вносит в процесс решения краевых задач деформирования разномодульных сред со сферическими поверхностями разрывов дополнительные особенности.

Уравнение (1.38) позволяет записать его функционально-инвариантное решение

$$u = \left(\frac{\Phi(\xi(r,t))}{r} + \frac{H(\eta(r,t))}{r} \right)_{,r}$$

с неизвестными функциями $\Phi(\xi(r,t))$ и $H(\eta(r,t))$, которые определяются для каждой конкретной краевой задачи в зависимости от поставленных начальных и краевых условий.

При решении задач удобнее искать решение в виде

$$u = \left(\frac{\Phi'(\xi(r,t)) + H'(\eta(r,t))}{r} - \frac{\Phi(\xi(r,t)) + H(\eta(r,t))}{r^2} \right), \qquad (1.39)$$

которое и будем использовать в дальнейшем.

Первый инвариант тензора малых деформаций J_1 с учетом (1.39) будет иметь вид $J_1 = \dfrac{\Phi'' + H''}{r}$. Следовательно, знак первого инварианта тензора малых деформаций определяется знаком суммы вторых производных искомых функций $\Phi(\xi(r,t))$ и $H(\eta(r,t))$: $\mathrm{Sign} J_1 = \mathrm{Sign}(\Phi'' + H'')$.

1.2.4 Изотропная несжимаемая упругая среда со сдвиговой разномодульностью

Рассмотрим динамическое деформирование несжимаемой упругой среды, по-разному сопротивляющейся сдвиговым нагрузкам, приложенным в противоположных направлениях [43]. Разномодульные механические свойства изотропной упругой среды определим упругим потенциалом W (аналог потенциала Муни) [84]:

$$W = -\beta_1 L_1 + \beta_2^{\pm} L_2^2. \tag{1.40}$$

Знаки перед слагаемыми в (1.40) выбраны так, чтобы упругие модули β_1, $\beta_2^{\pm}$ были положительными. Первый упругий модуль β_1 остается постоянным, второй упругий модуль $\beta_2^{\pm}$ меняет скачком свое значение при изменении направления сдвиговой нагрузки вдоль выбранной оси. Инварианты L_1, L_2 определяются главными значениями тензора деформаций α_i и имеют одинаковую степень малости по деформациям:

$$L_1 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha,$$
$$L_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2 + (\alpha_3 - \alpha)^2\}}.$$

Систему модельных соотношений в адиабатическом приближении для несжимаемой среды ($\rho = \rho_0$) со сдвиговой разномодульностью составляют соотношения (1.3), (1.5), (1.10), (1.18) и (1.40).

Рассмотрим одномерное сдвиговое движение точек среды, когда поле перемещений во всей области деформирования удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &u_2(x_1, t) = u(x_1, t), \\ &u_1 = u_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Тензор деформаций в данном случае имеет только три ненулевые компоненты $e_{11} = -\frac{1}{2}u_{,1}^2$, $e_{21} = e_{12} = \frac{1}{2}u_{,1}$. Тогда из формулы Мурнагана (1.18) для несжимаемой среды с потенциалом (1.40), сохраняя только нулевые и первые степени по компонентам тензора деформаций, для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = -P + \left(\frac{2}{3}\beta_1 + 2\beta_2^{\pm}\right) e_{11}, \\
\sigma_{21} = \sigma_{12} = \left(\frac{2}{3}\beta_1 + 3\beta_2^{\pm}\right) e_{21}, \\
\sigma_{22} = -P, \qquad \sigma_{33} = -P - \beta_2^{\pm} e_{11}, \\
\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0.
\end{gathered} \tag{1.42}$$

Положим, что коэффициент $\beta_2^{\pm} = \beta_2^{-}$ при $e_{21} > 0$ (сдвиговое движение точек среды в отрицательном направлении выбранной оси Ox_2), $\beta_2^{\pm} = \beta_2^{+}$ при $e_{21} < 0$ (сдвиг в положительном направлении Ox_2). Значение $e_{21} = 0$, как и в случае объемной разномодульности, является особой точкой зависимостей компонент напряжений от деформаций. Для определенности будем считать, что $\beta_2^{-} > \beta_2^{+}$.

Уравнение движения (1.10) с учетом соотношений (1.42) примет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_1} + c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\
c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\tilde{P} = \rho^{-1} P.
\end{gathered} \tag{1.43}$$

Из первого равенства (1.43) можно вычислить функцию добавочного гидростатического давления P при известном поле перемещений. Второе уравнение (1.43) служит для определения поля перемещений и является первостепенным при решении краевых задач. Константы c_1 и

c_2 в этом случае принимают значения

$$c_1 = \sqrt{\rho^{-1}\left(\frac{\beta_1}{3} + \beta_2^{\pm}\right)}, \qquad c_2 = \sqrt{\rho^{-1}\left(\frac{\beta_1}{3} + \frac{3\beta_2^{\pm}}{2}\right)}, \tag{1.44}$$

различные при противоположных направлениях сдвига.

Очевидно, что всюду в области деформирования решение второго уравнения (1.43) также можно представить в форме д'Аламбера (1.33) при $c = c_2$. Для скорости c_2 введем обозначения:

$$c_2^2 = \begin{cases} A^2 = \rho^{-1}\left(\frac{\beta_1}{3} + \frac{3\beta_2^-}{2}\right) & \text{при} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0, \\ B^2 = \rho^{-1}\left(\frac{\beta_1}{3} + \frac{3\beta_2^+}{2}\right) & \text{при} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0, \end{cases} \tag{1.45}$$

причем $A > B$ при $\beta_2^- > \beta_2^+$.

1.3 Соотношения на поверхностях разрывов

Согласно принятой гипотезе сплошности среды, перемещения u_i должны быть непрерывными функциями пространственных координат и времени во всем объеме, занимаемом сплошной средой. Однако при определенных граничных воздействиях на деформируемые тела в них возникают поверхности, на которых производные перемещений u_i могут претерпевать разрыв первого рода. Если разрыв терпят первые производные, то такие поверхности называют ударными волнами (или поверхностями сильного разрыва), которые являются передними фронтами деформаций, распространяющихся по среде. Если же на поверхности скачком меняют свои значения вторые производные, то поверхность называют слабой волной.

Рассмотрим в декартовой системе координат некоторую движущуюся поверхность Σ, которая изменяется в пространстве с течением

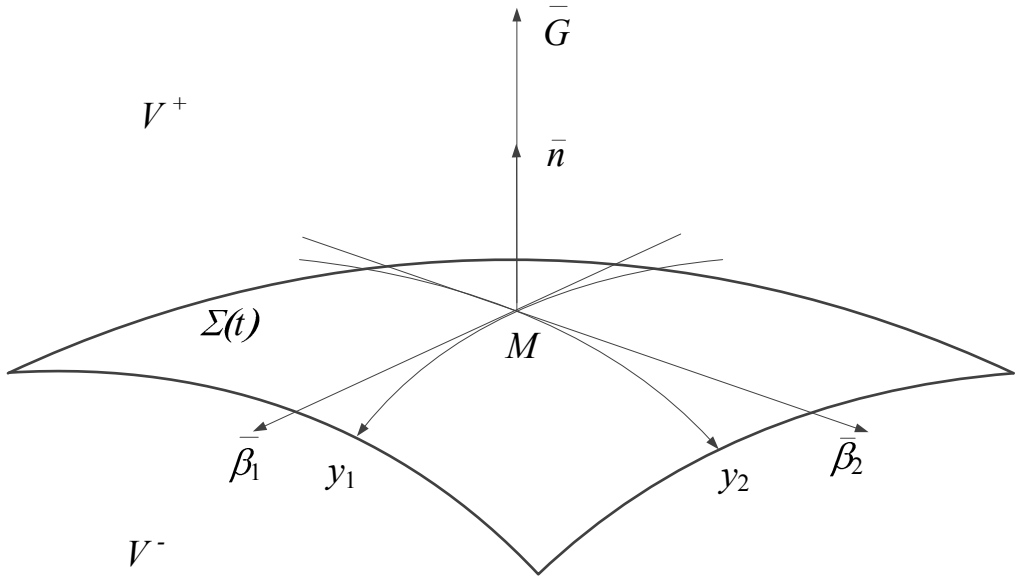


Рис. 2. Поверхность разрывов

времени. Уравнение такой поверхности запишем в виде

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = 0.$$

Введем вектор нормали $\bar{n}$ к поверхности разрыва, который является функцией координат точки поверхности, $\bar{n} = \bar{n}(x_1, x_2, x_3, t)$, $|\bar{n}| = 1$. Положим, что вектор нормали направлен в сторону движения Σ. Волновым лучом называют кривую, в каждой точке которой к ней касательная ортогональна вектору нормали $\bar{n}$. Выберем поверхностные координаты y_1 и y_2 так, чтобы они не изменялись вдоль луча (рис. 2). Векторы $\bar{\beta}_k$, расположенные в касательной плоскости к поверхности Σ, имеют координаты $x_{i,\alpha} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$, не обязательно являются единичными векторами и направлены по касательным к фиксированным координатным линиям y_α. Таким образом, в каждый момент времени t и в каждой точке M движущейся поверхности Σ можно ввести систему координат с ортами $\bar{n}$, $\dfrac{\bar{\beta}_1}{|\bar{\beta}_1|}$, $\dfrac{\bar{\beta}_2}{|\bar{\beta}_2|}$. Такая система координат в общем случае не является прямоугольной.

Пусть поверхность разрывов распространяется со скоростью

$G = G(x_1, x_2, x_3, t)$. Функция G определена только на $\Sigma(t)$. Тогда вектор скорости движения точек поверхности можно записать в виде

$$\bar{G} = G\bar{n}. \tag{1.46}$$

В общем случае скорость G отлична от скоростей движения точек среды.

Положим, что поверхность $\Sigma(t)$ разбивает рассматриваемый объем V на две части: V^+ – объем перед фронтом и V^- – за ним (рис. 2). Пусть в деформируемом объеме V определена функция $f(x_1, x_2, x_3, t)$, зависящая от декартовых координат x_i и времени t, которая непрерывна и дифференцируема в каждой точке V^+ и V^-, но имеет разрыв на $\Sigma(t)$. Значение функции $f(x_i, t)$ при подходе к поверхности $\Sigma(t)$ в V^+ обозначим через $f^+(x_i, t)$, а непосредственно за $\Sigma(t)$ в объеме V^- – через $f^-(x_i, t)$. В точках поверхности $\Sigma(t)$ значение функции определяется через поверхностные координаты зависимостью

$$f\left(x_i(y^\alpha, t), t\right) = F(y^\alpha, t), \qquad \alpha = 1, 2.$$

Частную производную функции $F(y^\alpha, t)$ по времени называют δ-производной функции $f(x_i, t)$ по времени [26]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + f_{,j}\dot{x}_j. \tag{1.47}$$

Вектор с компонентами $\dot{x}_j(y^\alpha, t)$ направлен по нормали к поверхности $\Sigma(t)$.

Градиент скалярного поля f можно разложить по базису $\bar{n}$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$:

$$f_{,i} = f_n n_i + f^\alpha x_{i,\alpha}. \tag{1.48}$$

Здесь $f_n = f_{,i} n_i$ – производная по нормали $\bar{n}$ к поверхности $\Sigma(t)$, $f^\alpha = g^{\beta\alpha} f_{,\beta}$ – производные по касательным к $\Sigma(t)$. Тензор $g^{\alpha\beta}$ на-

зывается контравариантным метрическим тензором поверхности, который связан с компонентами ковариантного метрического тензора $g_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha}x_{i,\beta}$ условием $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Тогда соотношения (1.47) и (1.48) запишем в форме:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + f_{,j}Gn_j, \tag{1.49}$$

$$f_{,i} = f_{,j}n_jn_i + g^{\alpha\beta}f_{,\alpha}x_{i,\beta}. \tag{1.50}$$

Для предельных значений функции $f(x_1, x_2, x_3, t)$ на поверхности $\Sigma(t)$ соотношения (1.49) и (1.50) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f^+}{\delta t} &= \dot{f}^+ + f^+_{,j}Gn_j, \\ \frac{\delta f^-}{\delta t} &= \dot{f}^- + f^-_{,j}Gn_j, \end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned} f^+_{,i} &= f^+_{,j}n_jn_i + g^{\alpha\beta}f^+_{,\alpha}x_{i,\beta}, \\ f^-_{,i} &= f^-_{,j}n_jn_i + g^{\alpha\beta}f^-_{,\alpha}x_{i,\beta}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Вычитая из первого равенства (1.51) второе и выполняя аналогичное действие с равенствами (1.52), получим

$$[\dot{f}] = -G[f_{,j}]n_j + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \tag{1.53}$$

$$[f_{,i}] = [f_{,j}]n_jn_i + g^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha}x_{i,\beta}, \tag{1.54}$$

где квадратными скобками обозначен скачок величины m на поверхности $\Sigma(t)$: $[m] = m^+ - m^-$. Соотношение (1.53) называют кинематическим, а (1.54) – геометрическим условием совместности разрывов производных первого порядка [122].

Если функция f непрерывна на поверхности $\Sigma(t)$, то получаем известные условия совместности разрывов Адамара:

$$\begin{aligned} &[\dot{f}] = -G[f_n] = -G[f_{,i}]n_i, \\ &[f_{,i}] = [f_n]n_i = [f_{,j}]n_in_j \quad \text{при } [f] = 0. \end{aligned} \tag{1.55}$$

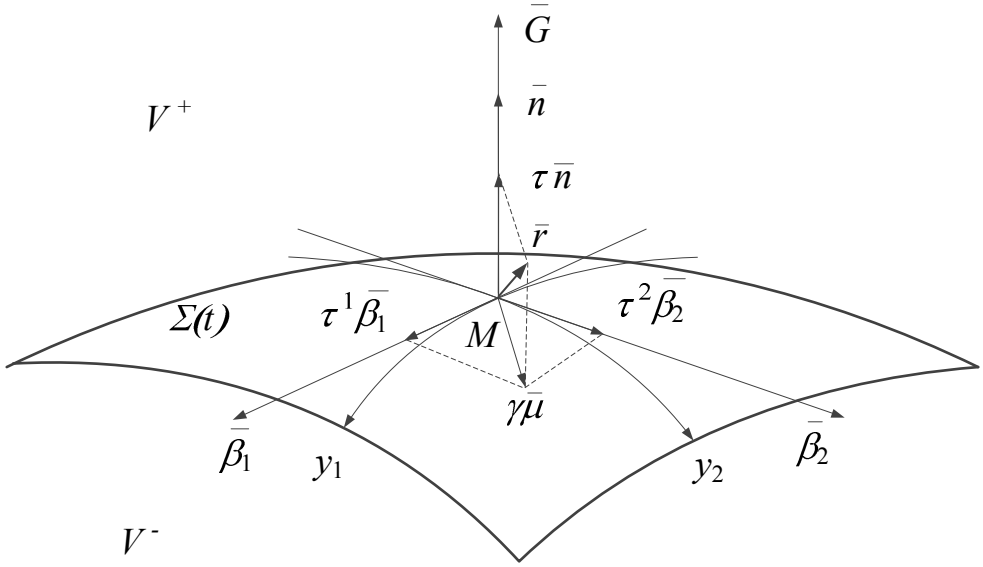


Рис. 3. Волновой вектор разрывов

Рассуждая аналогично, можно записать [26] геометрические и кинематические условия совместности второго порядка для разрывов вторых производных функции f на поверхности $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned} &[f_{,ij}] = [f_{,ks}]n_k n_s n_i n_j, \\ &[\ddot{f}] = G^2[f_{,ij}]n_i n_j, \end{aligned} \tag{1.56}$$

которые выполняются при $[f_i] = 0$, $[f_{,i}] = 0$. В этом случае G – скорость распространения поверхности слабого разрыва.

В каждой точке M поверхности $\Sigma(t)$ введем волновой вектор разрывов $\bar{r}$ (рис. 3), равный сумме своей нормальной и касательной составляющей к данной поверхности:

$$\bar{r} = \tau\bar{n} + \gamma\bar{\mu}. \tag{1.57}$$

Вектор $\bar{n}$ – единичная нормаль к поверхности $\Sigma(t)$ в точке M; $\bar{\mu}$ – единичный касательный вектор к поверхности $\Sigma(t)$ в той же точке; τ и γ – величины нормального и касательного к поверхности $\Sigma(t)$

разрыва первых производных компонент вектора перемещений (рис. 3):

$$
\begin{gathered}
n_i n_i = 1, \qquad \mu_i \mu_i = 1, \qquad n_i \mu_i = 0, \\
\mu_i = \gamma^{-1} \tau^\beta x_{i,\beta}, \qquad \gamma^2 = \tau^\beta \tau^\beta.
\end{gathered}
\tag{1.58}
$$

Векторы $\bar{n}$ и $\bar{\mu}$ определяют плоскость поляризации волны $\Sigma(t)$.

На ударной волне, где только перемещения u_i непрерывны, соотношения (1.55), (1.57), (1.58) позволяют записать геометрические и кинематические условия совместности для первых производных компонент вектора перемещений u_i:

$$
\begin{gathered}
[\dot{u}_i] = -G(\tau n_i + \gamma \mu_i), \\
[u_{i,j}] = (\tau n_i + \gamma \mu_i) n_j.
\end{gathered}
\tag{1.59}
$$

Здесь следует отметить, что, считая скачок $\upsilon_j u_{i,j}$ на ударной волне величиной малой по сравнению с $[\dot{u}_i]$, можно положить $[\upsilon_i] = [\dot{u}_i]$.

На поверхностях разрывов дифференциальные соотношения (1.9)–(1.11), полученные из законов сохранения, не выполняются. Однако следствием законов сохранения в интегральной форме (1.6)–(1.8) на поверхности разрывов $\Sigma(t)$ являются динамические условия совместности. Закон сохранения массы (1.6) приводит к соотношению

$$
[\rho(\upsilon_j n_j - G)] = 0, \tag{1.60}
$$

из которого можно определить скачок плотности. Закон сохранения импульса (1.7) приводит к уравнениям

$$
[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (\upsilon_j^+ n_j - G)[\upsilon_i], \tag{1.61}
$$

которое позволяет получить скорости распространения возможных ударных фронтов и условия их существования. Соотношения (1.61) являются основными для исследования свойств поверхностей разрывов.

Закон сохранения энергии (1.8) приводит к зависимости

$$\sigma_{ij}^{+}[\upsilon_i]n_j = \rho(\upsilon_j n_j - G)\left(\frac{[\upsilon_i][\upsilon_i]}{2} + [E]\right) - [q_j]n_j, \qquad (1.62)$$

откуда можно вычислить скачок внутренней энергии на ударной волне.

Далее будем опускать знак "+" у величин, вычисляемых непосредственно перед поверхностью $\Sigma(t)$.

На поверхности слабого разрыва вместо условий (1.59)-(1.62) необходимо выполнение динамических и кинематических условий совместности второго порядка, записанных на основе законов сохранения и соотношений (1.56):

$$\begin{aligned} &[\sigma_{ij,j}] = \rho[\omega_i], \\ &[\ddot{u}_i] = G^2[u_{i,sr}]n_s n_r, \\ &\text{при} \quad [u_{i,j}] = 0, \quad [u_i] = 0. \end{aligned} \qquad (1.63)$$

В случае адиабатического приближения для упругой среды процесс распространения поверхности разрывов $\Sigma(t)$ является единственным возможным необратимым процессом, поскольку теплопроводностью при построении модели пренебрегаем. Из второго закона термодинамики следует условие на изменение энтропии на ударной волне $[S] \leqslant 0$, согласно которому производство энтропии на ударной волне должно подчиняться неравенству [22]:

$$\sigma_{ij}[\upsilon_i]n_j - \frac{1}{2}\rho(\upsilon_j n_j - G)[\upsilon_i][\upsilon_i] - \frac{\rho}{\rho_0}(\upsilon_j n_j - G)[W] \geqslant 0. \qquad (1.64)$$

Неравенство (1.64) в механике деформируемого твердого тела называют термодинамическим условием совместности разрывов. Его аналог в газовой динамике – известная теорема Цемплена – устанавливает запрет на существование ударных волн расширения.

В случае малых деформаций соотношение (1.64) примет вид

$$\sigma_{ij}[\upsilon_i]\nu_j + \frac{1}{2}\rho G[\upsilon_i][\upsilon_i] + G[W] \geqslant 0. \qquad (1.65)$$

Неравенство (1.64) (или (1.65)) необходимо проверять на поверхностях сильных разрывов после решения конкретной краевой задачи ударного деформирования для обоснования корректности постановки задачи путем определения типов волновых фронтов.

1.4 Ударные волны при одномерном деформировании несжимаемой упругой среды

Рассмотрим случай одномерного движения несжимаемой среды, когда вектор перемещений имеет компоненты $u_1 = 0$, $u_2 = u_2(x_1, t)$, $u_3 = u_3(x_1, t)$, а поверхность разрывов преобразуется в плоскость разрывов $\Sigma(t)$ [15]. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось $x_1 = x$ была направлена в сторону движения волны, то есть коллинеарна вектору единичной нормали $\bar{n}$ к $\Sigma(t)$, а координатная плоскость (x_2, x_3) совпадала с плоскостью волны $\Sigma(t)$ (рис. 4)

Единичные векторы $\bar{e_2}$ и $\bar{e_3}$ на рис. 4 являются ортами соответствующих осей x_2 и x_3, G – скорость движения плоскости $\Sigma(t)$. Векторы $\bar{n}$ и $\bar{\mu}$ имеют координаты

$$\bar{n} = \{1, 0, 0\}, \qquad \bar{\mu} = \{0, \mu_2, \mu_3\}$$

и определяют положение плоскости поляризации волны.

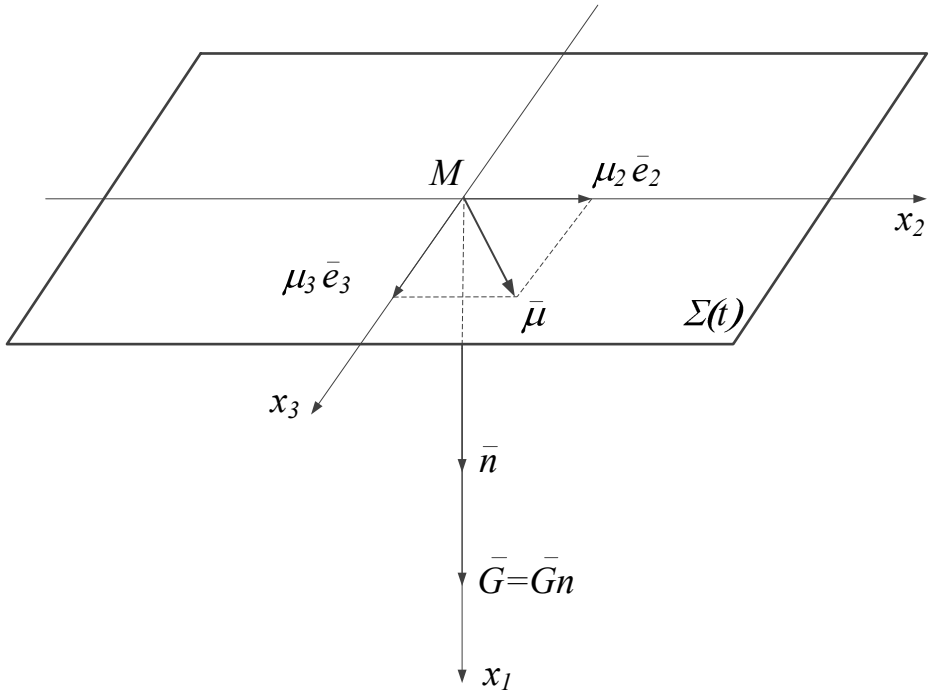


Рис. 4. Плоскость разрывов

Из (1.60)–(1.62), привлекая кинематические и геометрические условия совместности разрывов (1.59), можно получить:

$$
\begin{gathered}
[\sigma_{11}] = 0, \qquad [\sigma_{i1}] = -\rho G[\upsilon_i], \\
[\upsilon_i] = -G\tau_i, \quad \tau_i = [u_{i,1}], \quad [\upsilon_1] = 0, \quad (i = 2, 3).
\end{gathered}
\tag{1.66}
$$

Первое равенство из (1.66) служит для вычисления разрыва $[P]$ добавочного гидростатического давления P.

Второе равенство из (1.66) после подстановки в него зависимостей для σ_{i1} из (1.21) приводит к соотношениям

$$
\begin{gathered}
\tau_i \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l m^l + (u_{i,1} - \tau_i)[m] \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} C_l^j m^{l-j} [m]^{j-1} = \rho G^2 \tau_i, \\
(i = 2, 3).
\end{gathered}
\tag{1.67}
$$

При известном деформированном состоянии перед плоскостью разрывов $\Sigma(t)$ два соотношения (1.67) представляют собой систему двух уравнений относительно трех неизвестных τ_2, τ_3, G. Умножим первое

из них $(i = 2)$ на τ_3, а второе – на τ_2 и вычтем одно из другого. В результате получим условие на деформированное состояние перед поверхностью $\Sigma(t)$ и возможные разрывы τ_2 и τ_3, при которых только и возможно существование последних:

$$\{\tau_3(u_{2,1} - \tau_2) - \tau_2(u_{3,1} - \tau_3)\}\,[m] = 0. \tag{1.68}$$

Выполнение условия (1.68) возможно только в двух случаях. В первом из них $[m] \neq 0$, и

$$\frac{u_{3,1}^+}{u_{2,1}^+} = \frac{u_{3,1}^-}{u_{2,1}^-} = \frac{\tau_3}{\tau_2}, \tag{1.69}$$

$$G_1 = \left\{ \frac{1}{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l m^l + \frac{1}{\rho\tau_2}(u_{2,1} - \tau_2)[m] \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \sum_{j=1}^{l} (-1)^j C_l^j m^{l-j} [m]^{j-1} \right\}^{1/2}. \tag{1.70}$$

Согласно (1.69), такая плоскость разрывов может изменить только интенсивность предварительного сдвига m без изменения его направленности. Плоскость поляризации этой ударной волны всецело определяется предварительными деформациями в среде и не зависит от характера ударного воздействия на среду. Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться, чтобы $u_{2,1}^+ \neq 0$, а $u_{3,1}^+ = 0$. Тогда $\tau_2 \neq 0$, а $\tau_3 = 0$, следовательно, и за поверхностью $\Sigma(t)$ деформированное состояние будет определяться одним параметром $u_{2,1}^- \neq 0$, в то время как $u_{3,1}^- = 0$. При таком выборе системы координат зависимость (1.70) упрощается:

$$G_1 = \left\{ (\rho\tau_2)^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} 2l\eta_l \left(u_{2,1}^{2l-1} - (u_{2,1} - \tau_2)^{2l-1} \right) \right\}^{1/2}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{2}\mu, \qquad \eta_2 = \frac{1}{4}\gamma_1, \qquad \ldots \tag{1.71}$$

Кроме условия разрешимости системы уравнений в разрывах (1.68), имеет место другое ограничение на существование ударных волн

в упругой среде – термодинамическое условие совместности разрывов на ней. Соотношение (1.64) в рассматриваемом случае одномерного движения в несжимаемой упругой среде сводится к неравенству

$$\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{j=3}^{2l}\left(\frac{j}{2}-1\right)\frac{(2l)!(-1)^j}{j!(2l-j)!}u_{2,1}^{2l-j}\tau_2^j \geq 0. \tag{1.72}$$

Неравенство (1.72) заведомо выполняется, если перед плоскостью разрывов среда недеформирована. Когда сдвиговые деформации перед поверхностью $\Sigma(t)$ присутствуют, то достаточным условием для выполнения (1.72) является условие $u_{2,1}^{+}\tau_2 \leq 0$. Это означает, что возможны ударные волны сдвиговой нагрузки, приводящие к развитию имеющихся в среде сдвиговых деформаций. Ударные волны сдвиговой разгрузки термодинамически невозможны.

Вторая возможность выполнения условия существования разрывов деформаций в несжимаемой упругой среде (1.68) связана с равенством $[m] = 0$. Это означает, что интенсивность предварительного сдвига неизменна и на такой плоскости разрывов скачкообразно меняется только его направленность. Данную плоскость разрывов называют ударной волной круговой поляризации [71]. Для скорости ее продвижения из (1.67) следует:

$$G_2 = \left\{\rho^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l m^l\right\}^{1/2}. \tag{1.73}$$

Сравнивая (1.71) и (1.73), приходим к выводу, что G_1 всегда больше G_2. Ударная волна круговой поляризации является изэнтропической. Направленность сдвиговых деформаций при переходе через данную поверхность разрывов ориентируется в зависимости от производимого ударного воздействия на граничной плоскости тела.

Из проведенного анализа следует, что разрыв добавочного гидростатического давления P возможен только на плоскополяризованной волне, распространяющейся со скоростью, вычисляемой зависимостью (1.71) или (1.73). На плоскости разрывов круговой поляризации скачок функции P невозможен.

1.5 Классификация возможных разрывов при одноосном деформировании разномодульной упругой среды

Пусть в упругой среде с потенциалом (1.23), по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию, движется поверхность $\Sigma(t)$, на которой производные компонент вектора перемещений могут претерпевать разрыв. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось $x_1 = x$ была направлена в сторону движения поверхности разрыва $\Sigma(t)$, то есть коллинеарна вектору единичной нормали $\bar{n}$ к Σ. Рассмотрим частный случай движения точек среды, определенный соотношениями (1.26) – одноосное деформирование. В этом случае поверхность разрывов $\Sigma(t)$ выродится в плоскость разрывов, если при переходе через нее $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ имеет скачок или меняет знак. Таким образом, остановимся на изучении плоских одномерных волн при одноосном деформировании в разномодульной упругой среде.

На движущейся плоскости разрыва $\Sigma(t)$ кинематические и геометрические условия совместности (1.59) можно записать в форме:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -G\tau, \tag{1.74}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \tau, \tag{1.75}$$

а динамические условия совместности (1.61) примут вид

$$[\sigma_{11}] = [\sigma] = -\rho G \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right], \tag{1.76}$$

где G – скорость движения плоскости разрыва $\Sigma(t)$. Таким образом, разрыв компоненты тензора напряжений, используя (1.74), равен

$$[\sigma] = \rho G^2 \tau = \rho G^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{1.77}$$

С другой стороны, используя правила вычисления разрывов, получим разрывы компоненты тензора напряжений из формулы (1.30) и компоненты тензора деформаций из (1.27):

$$[e_{11}] = [e] = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \tau, \tag{1.78}$$

$$[\sigma] = (\lambda + 2\mu)\tau - 2\nu \left(k\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \tau\right)[k]\right), \tag{1.79}$$

$$k = \mathrm{Sign}(e) = \mathrm{Sign}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Если интенсивность волны τ отлична от нуля (т.е. $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \neq 0$), то скорость движения плоскости разрыва $\Sigma(t)$ вычисляется из (1.77) с учетом (1.79) в виде:

$$G^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} - \frac{2\nu}{\rho}\left(k + \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \tau}{\tau}[k]\right). \tag{1.80}$$

Учитывая введенные выше обозначения (1.32), преобразуем выражение (1.80) к виду, в котором нет явной зависимости от констант материала:

$$2G^2 = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\left(k + \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \tau}{\tau}[k]\right). \tag{1.81}$$

В случае, если перед плоскостью разрыва $\Sigma(t)$ и сразу за ней деформации меняют знак (т.е. $[k] \neq 0$), то скорость волны равна a или

b – одной из фазовых скоростей уравнения движения (1.31), определяемых зависимостями (1.32). Если же на волне не происходит смены знака деформаций, тогда для вычисления скорости движения плоскости разрыва $\Sigma(t)$ необходимо решение функциональных уравнений.

Воспользуемся классификацией возможных разрывов решения уравнения движения (1.31), подобной введенной в [90].

1. *Ударная волна*

   Пусть в решении уравнения движения (1.31) существует разрыв первых производных перемещений и при переходе через плоскость разрывов $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ меняет свой знак с положительного на отрицательный. Тогда в среде распространяется одномерная ударная волна со скоростью G_α.

2. *Сигнотон*

   Если в решении уравнения движения (1.31) существует разрыв первых производных перемещений и при переходе через плоскость разрыва $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ сохраняет свой знак, то в среде распространяется одномерный сигнотон со скоростью G_γ.

3. *Полусигнотон*

   Пусть обобщенное решение уравнения движения (1.31) имеет разрыв первых производных перемещений. Если при переходе через плоскость разрывов с одной стороны от нее $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, а с другой стороны $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq 0$, то такую плоскость назовем полусигнотоном, движущимся со скоростью G_β.

4. *Простой разрыв*

Простым разрывом со скоростью распространения G_δ будем называть одномерную волну, на которой первые производные перемещений меняют знак и вторые производные перемещений $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ терпят разрыв.

Если полусигнотон, простой разрыв, сигнотон распространяются со скоростью a, то это быстрые одномерные волны, если со скоростью b – медленные. Такая классификация [90] определяет свойства плоских одномерных волн в разномодульной упругой среде с кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями (1.30):

– ударная волна меняет значение фазовой скорости уравнения движения с b на a, сжимая предварительно растянутую среду (следует отметить, что обратный случай невозможен согласно условию невозрастания энтропии на ударной волне [22]);

– полусигнотон либо является передним фронтом распространения граничных возмущений по недеформированной среде (волной сжатия или волной разрежения в зависимости от вида граничного воздействия), либо возвращает ранее деформированную область среды в свободное состояние;

– сигнотон скачком изменяет величину уже существующих предварительных деформаций, не меняя при этом фазовой скорости уравнения движения;

– на простом разрыве перемещения являются гладкой функцией, а их первые производные имеют излом.

Согласно соотношениям (1.75) и (1.76), на плоской одномерной ударной волне, полусигнотоне и сигнотоне при непрерывных перемещениях необходимо выполнить условия совместности разрывов первого

порядка (1.61), которые в случае одноосного деформирования примут вид

$$\sigma^+ - \sigma^- = \rho^+ G^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} \right) \quad \text{при} \quad u^+ = u^-, \tag{1.82}$$

где G – скорость распространения соответствующей линии разрывов. Аналогично из условий (1.63) для простого разрыва запишем:

$$\frac{\partial \sigma^+}{\partial x} - \frac{\partial \sigma^-}{\partial x} = \rho^+ G_\delta^2 \left(\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} \right) \quad \text{при} \quad \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\partial u^-}{\partial x}. \tag{1.83}$$

Поскольку на ударной волне производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ меняет знак с положительного на отрицательный, то компонента напряжений, используя соотношения (1.30) и (1.32), в области перед ударной волной вычисляется как $\sigma^+ = \rho b^2 \dfrac{\partial u^+}{\partial x}$, а за ударной волной $\sigma^- = \rho a^2 \dfrac{\partial u^-}{\partial x}$. Используя условие (1.82), запишем следующее соотношение для определения скорости ударной волны

$$\rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \rho b^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho G_\alpha^2 \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} \right),$$

преобразуя которое, получим, что модуль скорости ударной волны необходимо удовлетворяет неравенству $b < G_\alpha < a$. Проведя подобные вычисления для полусигнотона (G_β) и сигнотона (G_δ), используя условие (1.82), а для простого разрыва (G_γ) – условие (1.83), получим, что их скорости постоянны и могут принимать значения a или b в зависимости от краевых условий задачи.

Из термодинамического условия совместности разрывов (1.65) на плоской одномерной волне, распространяющейся в разномодульной упругой среде, следуют некоторые ограничения на константы материала. Если введенный в (1.29), (1.79) параметр k не меняет своего значения на плоскости разрыва (т.е. рассматривается сигнотон или полусигнотон),

то подстановка упругого потенциала (1.29) и, соответственно, зависимости (1.30) в неравенство (1.65) обращает его в тождество.

Пусть теперь параметр k скачком меняет свое значение на плоскости разрывов с $k^+ = 1$ на $k^- = -1$ $([k] = 2)$, т.е. рассмотрим ударную волну. Для дальнейшего анализа необходимо вычислить разрыв величины W, входящей в (1.65). Согласно (1.74) и (1.29), получаем

$$\begin{gathered}[W] = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)[u_{,1}^2] - \nu[ku_{,1}^2] = \\ = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(2u_{,1}\tau - \tau^2) - \nu(2u_{,1}^2 - 2u_{,1}\tau + \tau^2).\end{gathered} \tag{1.84}$$

Подставляя (1.30), (1.74) и (1.84) в неравенство (1.65), имеем

$$4\nu u_{,1}\tau + \frac{1}{2}\rho G^2\tau^2 - \left(\frac{\lambda}{2} + \mu + \nu\right)\tau^2 - 2\nu u_{,1}^2 \geqslant 0. \tag{1.85}$$

Скорость ударной волны (1.80) с учетом (1.75) принимает вид

$$G^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} - \frac{2\nu}{\rho}\left(1 + \frac{2\dfrac{\partial u^-}{\partial x}}{\dfrac{\partial u^+}{\partial x} - \dfrac{\partial u^-}{\partial x}}\right), \tag{1.86}$$

которая позволяет упростить неравенство (1.85):

$$\nu\frac{\dfrac{\partial u^-}{\partial x}}{\dfrac{\partial u^+}{\partial x} - \dfrac{\partial u^-}{\partial x}} \geqslant 0. \tag{1.87}$$

Так как согласно введенной классификации на ударной волне $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ меняет знак с положительного на отрицательный, тогда для выполнения неравенства (1.87), в следовательно и (1.65), необходимо, чтобы $\nu < 0$. В этом случае темодинамически возможен в разномодульной упругой среде переход из растянутого состояния в сжатое и распространение ударной волны.

В случае сферической симметрии, когда поверхность разрывов движется в разномодульной среде с потенциалом (1.37), принцип классификации возможных разрывов уравнения движения (1.38) по типам (полусигнотон, сигнотон, ударная волна, простая волна) остается таким же, что и для плоских одномерных волн в разномодульной среде с потенциалом (1.23). Однако при определении типа волнового фронта в случае сферической симметрии играет роль знак и поведение первого инварианта тензора деформаций J_1, а не знак градиента $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Если же поверхность разрывов $\Sigma(t)$ движется в среде с потенциалом (1.40), по-разному реагирующей на сдвиги в противоположных направлениях, классификация возможных разрывов решения уравнения движения (1.43) является аналогичной рассмотренной для сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Все перечисленные сведения о типах и особенностях распространения поверхностей сильных и слабых разрывов необходимы для постановки и решения краевых задач динамики деформирования рассматриваемых упругих сред.

2. Автомодельная задача о взаимодействии ударных волн в несжимаемой упругой среде

2.1 Одномерные автомодельные движения точек несжимаемой среды. Удар по деформированному упругому полупространству

Рассмотрим одномерное движение в несжимаемом упругом полупространстве при наличии предварительных деформаций. Следствием несжимаемости в одномерном случае является то, что из компонент тензора градиента перемещений $u_{1,1} = 0$, а $u_{2,1}(x_1, t)$ и $u_{3,1}(x_1, t)$ отличны от нуля. Предположим, что до начала какого-либо воздействия на границу всюду в полупространстве

$$u_{2,1} = f_0 = \text{const}, \quad u_{3,1} = q_0 = \text{const}, \quad P = P_0 = \text{const}. \tag{2.1}$$

Пусть в момент времени $t = 0$ на границу упругого полупространства x_1=0 начинает действовать сдвигающе-сжимающая нагрузка $\sigma_{ij}(u_{2,1}, u_{3,1}) = \text{const}$. Под действием нагрузки постоянные f_0, q_0 и P_0 скачкообразно изменяются до значений $u_{2,1}\big|_{x_1=0} = f_1 = \text{const}$, $u_{3,1}\big|_{x_1=0} = s_1 = \text{const}$, $P\big|_{x_1=0} = P_1 = \text{const}$.

Постоянство приложенной на границу полупространства нагружающих усилий σ_{ij} позволяет провести решение задачи в автомодельном виде. Введем автомодельную переменную $\xi = x_1/ct$ ($c^2 = \mu\rho^{-1}$) и функции $w(\xi) = \dfrac{u_2}{ct}$ и $\zeta(\xi) = \dfrac{u_3}{ct}$.

Перепишем уравнения движения несжимаемой упругой среды (1.22), учитывая выражения (1.21) для компонент тензора напряжений σ_{ij}, через автомодельную переменную ξ. Получим для функций $w(\xi)$

и $\zeta(\xi)$ систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Fw'' + D\zeta'' = 0, \\ Dw'' + Q\zeta'' = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} F &= -\rho c^2\xi^2 + \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l m^l + 2(w')^2\sum_{l=1}^{\infty} l\gamma_l m^{l-1}, \\ Q &= -\rho c^2\xi^2 + \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l m^l + 2(\upsilon')^2\sum_{l=1}^{\infty} l\gamma_l m^{l-1}, \\ D &= 2w'\zeta'\sum_{l=1}^{\infty} l\gamma_l m^{l-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.2) в силу своей однородности имеет тривиальное решение $w'' = 0$, $\zeta'' = 0$, если ее определитель не равен нулю. Тривиальное решение существует в областях между поверхностями разрывов. В этом случае функции $w(\xi)$ и $\zeta(\xi)$ можно записать в виде

$$w = f\xi + g, \qquad \zeta = q\xi + z, \tag{2.4}$$

где f, g, q, z – произвольные константы интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2), которые различны для каждой зоны между волнами.

Согласно соотношениям (2.4) можно получить следующие соотношения для градиентов компонент вектора перемещений и компонент скорости перемещений:

$$\begin{aligned} u_{2,1} = f, \quad u_{3,1} = q, \\ \upsilon_1 = cg, \quad \upsilon_2 = cz. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Нетривиальное решение существует, если определитель системы (2.2) равен нулю:

$$FQ - D^2 = 0. \tag{2.6}$$

Учитывая введенные обозначения (2.3), соотношение (2.6) обращается в тождество, если только ξ и m связаны зависимостью

$$\xi^2 = 1 + \frac{1}{\rho c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l (1 + 2l) m^l. \tag{2.7}$$

Подстановка (2.5) в (2.2) приводит к тому, что всюду в области нетривиального решения необходимо выполняется условие

$$\frac{\zeta'}{w'} = \text{const}. \tag{2.8}$$

Решение (2.7) уравнения (2.6) при условии (2.8) задает плоскополяризованную волну Римана. На такой волне, как и на ударной волне сдвиговой нагрузки (1.69)–(1.70), не может меняться направленность предварительного сдвига, а изменяется только его интенсивность.

Положение переднего и заднего фронтов простой волны задаются соответствующими значениями переменной ξ:

$$\begin{gathered} \xi^+ = \left\{ 1 + \frac{1}{\rho c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l (1+2l) m_0^l \right\}^{1/2}, \\ \xi^- = \left\{ 1 + \frac{1}{\rho c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l (1+2l) m_i^l \right\}^{1/2}, \\ m_i = f_i^2 + q_i^2. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Индекс i в величине m_i соответствует номеру области за волновым фронтом.

Из (2.9) следует, что центрированная волна распространяется только в случае, когда $m_1 < m_0$, являясь, таким образом, центрированной волной разгрузки. Когда же $m_1 > m_0$, в среде распространяется ударная волна, меняющая значение переменной m скачкообразно от значения m_0 до значения m_1, то есть происходит дополнительный сдвиг в направлении предварительных деформаций. Это поперечная волна нагрузки, на которой необходимо выполнение условия (1.69). Скорость

такой волны может быть вычислена согласно (1.70), если положить $m = m_0$.

Имеется еще одно решение уравнения (2.6):

$$\xi^2 = 1 + \frac{1}{\rho c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l m^l. \tag{2.10}$$

Подстановка (2.10) в (2.2), аналогично предыдущему решению, приводит к тому, что в области нетривиального решения необходимо выполнение условия $m' = 0$. В этом случае существует только одно значение ξ , при котором деформированное состояние может измениться. Сравнивая (2.10) с (1.73), можно сделать вывод, что полученное значение ξ соответствует положению ударной волны круговой поляризации, распространяющейся следом за ударной волной нагрузки при $m_1 > m_0$, или центрированной волной, если $m_1 < m_0$. Действительно, значение ξ , следующее из (2.10), оказывается меньшим ξ^- , вычисленному согласно второму равенству из (2.9). Таким образом, изменение направленности предварительных сдвиговых деформаций может происходить в рассматриваемом случае только скачкообразно на данной ударной волне в соответствии с производимым воздействием на границы упругого слоя. Скорость распространения данной ударной волны можно вычислить из (1.73), если положить в нем $m = m_0$.

Неизвестная функция P добавочного гидростатического давления во всей деформированной области за ударной волной нагрузки или центрированной волной разгрузки согласно (1.21), (1.66) вычисляется зависимостью

$$P_i = -P_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l m_i^l. \tag{2.11}$$

В области центрированной волны $\xi \in [\xi^-, \xi^+]$ функция P меняется непрерывно от значения P_0 при $\xi = \xi^+$ до значения P при

$\xi = \xi^-$, следующего из (2.11). На ударной волне круговой поляризации функция добавочного гидростатического давления непрерывна.

2.2 Одномерное столкновение плоских ударных волн

Рассмотрим несжимаемый упругий слой толщины $h = h_1 + h_2$, который до начала воздействия на его границы находился в недеформированном состоянии (зона 0 на рис. 5). Начальное гидростатическое давление задано постоянным $P = P_0 = \text{const}$.

Толщину упругого слоя зададим достаточно большой, чтобы не учитывать эффекты отражения возмущений от границ слоя.

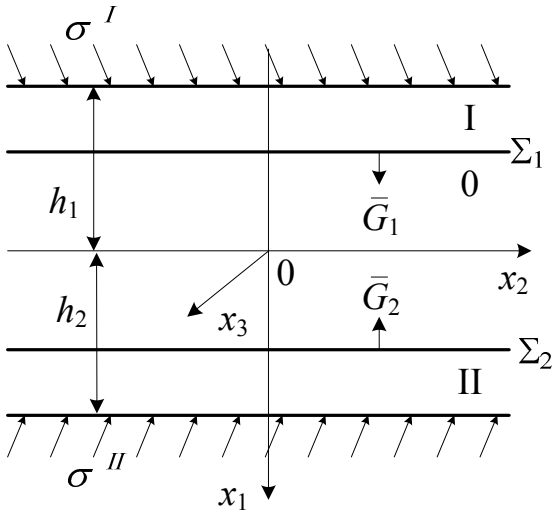


Рис. 5. Возникновение сдвиговых ударных волн в несжимаемом упругом слое

Положим, что в начальный момент времени на границы слоя начинает действовать сдвигающе-сжимающая ударная нагрузка $\sigma_{ij}(u_{2,1}, u_{3,1})$:

$$\sigma_{11}^I = \text{const} < 0, \quad \sigma_{11}^{II} = \text{const} < 0,$$

$$\sigma_{i1}^I = \text{const}, \quad \sigma_{i1}^{II} = \text{const} \quad (i = 2, 3)$$

с постоянными параметрами $u_{2,1}^I = f_I$ и $u_{3,1}^I = q_I$ при $x_1 = -h_1$, $u_{2,1}^{II} = f_{II}$ и $u_{3,1}^{II} = q_{II}$ при $x_1 = h_2$; индексы, обозначенные римскими

цифрами, указывают на соответствующие зоны деформирования на рисунках. Гидростатическое давление скачкообразно меняет свое значение на $P_I = \text{const}$ в области I и $P_{II} = \text{const}$ в области II.

В результате воздействия на границы в недеформированном слое навстречу друг другу начинают двигаться два плоских сдвиговых ударных фронта Σ_1 и Σ_2 (рис. 5) со скоростями G_1 и G_2. Будем считать, что координатная система расположена так, что движущиеся плоскости разрывов Σ_1 и Σ_2 в момент встречи совпадают с координатной плоскостью $x_1 = 0$.

Параметры напряженно-деформированного состояния среды за поверхностями Σ_1 и Σ_2 до момента их столкновения (в зонах I и II на рис. 5) однозначно определяются из соотношений (1.21) заданными граничными условиями. Скорости плоских сдвиговых ударных фронтов G_1 и G_2 определяются из соотношения (1.70):

$$\begin{aligned} G_1 &= c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1 m_I + \ldots\right\}^{1/2}, \\ G_2 &= c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1 m_{II} + \ldots\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для определения характера волновой картины, возникающей после взаимодействия ударных волн нагрузки Σ_1, Σ_2, введем понятие *вектора сдвига* $\bar{s} = \{u_{2,1}, u_{3,1}\}$. В зоне I (рис. 6) заданное деформированное состояние среды характеризуется вектором $\bar{s}_I = \{u^I_{2,1}, u^I_{3,1}\}$, в зоне II – вектором $\bar{s}_{II} = \{u^{II}_{2,1}, u^{II}_{3,1}\}$.

После столкновения ударных волн Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны от плоскости $x_1 = 0$ отражаются два пакета плоских одномерных волновых фронтов. В несжимаемой упругой среде каждый пакет содержит два волновых фронта (ударных или простых), согласно полученным результатам в § 2.1. Состояние в зоне между последними отра-

женными волновыми фронтами должно определяться как $\bar{s} = \bar{s}_I + \bar{s}_{II}$. Тип отраженных волновых фронтов (ударная волна или простая волна Римана) будет зависеть от соотношения модулей $|\bar{s}|$, $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$. Следовательно, рассматривая различные соотношения модулей векторов $|\bar{s}|$, $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$, можно получить разные комбинации ударных волновых фронтов и простых центрированных волн, порождаемые взаимодействием двух ударных волн нагрузки, в зависимости от интенсивности и поляризации последних.

2.2.1 Отражение четырех ударных фронтов

Положим, что краевые условия задачи заданы таким образом (рис. 6, а), что

$$|\bar{s}_I| \leqslant |\bar{s}_{II}| < |\bar{s}|. \tag{2.13}$$

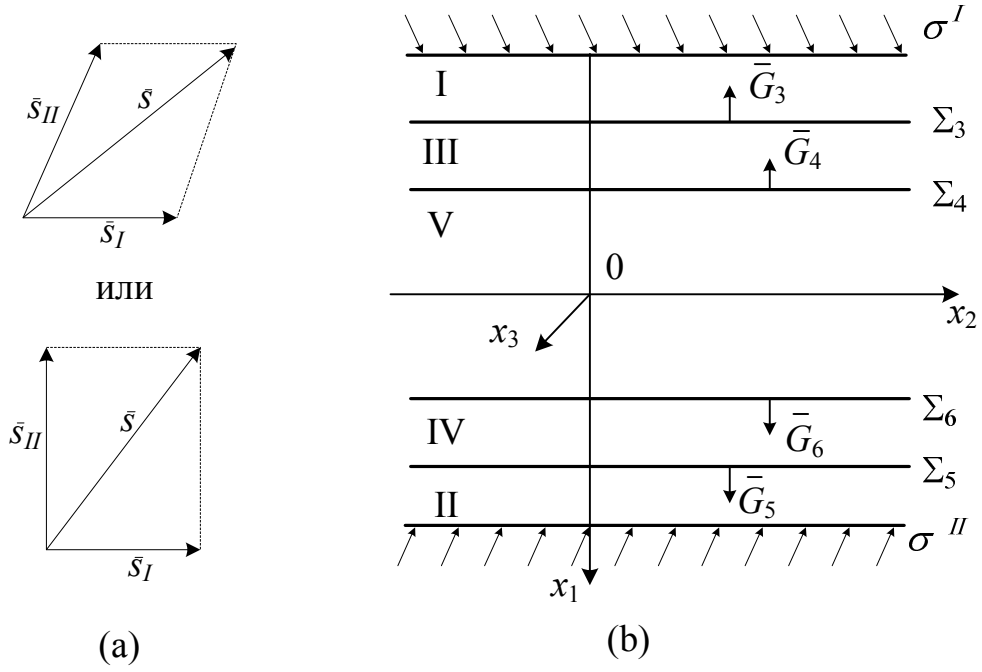


Рис. 6. Отражение четырех ударных волн

Соотношение (2.13) реализуется, если, например, идущие навстречу друг другу волны Σ_1 и Σ_2 ортогонально поляризованы, т.е. напря-

женно-деформированное состояние за ними задано параметрами:

$$
\begin{aligned}
&u_{2,1}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = f_I = \mathrm{const} < 0, \quad u_{3,1}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = q_I = 0,\\
&u_{2,1}^{II}\big|_{x_1=h_2} = f_{II} = 0, \quad u_{3,1}^{II}\big|_{x_1=h_2} = q_{II} = \mathrm{const} > 0.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Поскольку результирующий сдвиг $|\bar{s}|$ в соответствии с условием (2.13) больше, чем заданные на границах слоя $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$, то после взаимодействия волновых фронтов Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны начинает двигаться пара волновых пакетов из двух ударных волн каждый (рис. 6, b). Ударные возмущения распространяются в уже деформированные области I и II. Передние отраженные фронты Σ_3 и Σ_5 являются ударными сдвиговыми волнами, а на ударных волнах Σ_4 и Σ_6 происходит поворот увеличенных сдвигов так, чтобы их направленность совпала.

Таким образом, решение задачи заключается в определении скоростей распространения волн нагрузки Σ_1, Σ_2, ударных сдвиговых волн Σ_3, Σ_5, ударных волн поворота Σ_4, Σ_6, а также параметров напряженно-деформированного состояния f, q, g, z в зонах I, II, III, IV, V между волновыми фронтами.

Скорости распространения волн нагрузки Σ_1 и Σ_2 и остальные параметры напряженно-деформированного состояния в областях I и II (рис. 5) с учетом (2.14) принимают значения

$$
\begin{gathered}
G_1 = c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1 f_I^2 + \ldots\right\}^{1/2},\\
G_2 = c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1 q_{II}^2 + \ldots\right\}^{1/2},\\
\upsilon_2^I = -f_I G_1, \quad \upsilon_3^I = 0, \quad P_I = P_0 - \beta_1 f_I^2 - \beta_2 f_I^4 + \ldots,\\
\upsilon_2^{II} = 0, \quad \upsilon_3^{II} = q_{II} G_2, \quad P_{II} = P_0 - \beta_1 q_{II}^2 - \beta_2 q_{II}^4 + \ldots.
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

Систему уравнений для определения скоростей отраженных ударных волн G_3, G_4, G_5, G_6 и параметров деформирования среды меж-

ду волнами в зонах III, IV и V (рис. 6, b) можно представить в виде четырех блоков (по количеству отраженных волн), каждый из которых состоит из условий непрерывности перемещений на ударной волне

$$[u_i]\big|_{\Sigma_k} = 0, \tag{2.16}$$

и динамических условий совместности разрывов

$$[\mu^{-1}\sigma_{i1}]\big|_{\Sigma_k} = -\xi_k[c^{-1}\upsilon_i], \qquad i = 2, 3, \tag{2.17}$$

индекс k соответствует номеру волны на рис. 6, b.

Передние отраженные фронты Σ_3 и Σ_5 являются ударными сдвиговыми волнами, движущиеся со скоростями G_3 и G_5 соответственно, увеличивают длину первоначальных сдвигов. Следовательно, $q_{III} = q_I = 0$, $\upsilon_3^{(III)} = \upsilon_3^{(I)} = 0$ в области III и $f_{IV} = f_{II} = 0$, $\upsilon_2^{(IV)} = \upsilon_2^{(II)} = 0$. Запишем динамические условия совместности (2.17) с учетом (1.21):

на волне Σ_3

$$(\mu + \gamma_1 m_I)f_I - (\mu + \gamma_1 m_{III})f_{III} = -\rho c^2 \xi_3 (g_I - g_{III}), \tag{2.18}$$

на волне Σ_5

$$(\mu + \gamma_1 m_{II})q_{II} - (\mu + \gamma_1 m_{IV})q_{IV} = -\rho c^2 \xi_5 (h_{II} - h_{IV}). \tag{2.19}$$

Переменная ξ_3 определяет положение фронта Σ_3, ξ_5 — фронта Σ_5.

Условия непрерывности перемещений (2.16) на сдвиговой ударной волне Σ_3 в этом случае имеют вид

$$(f_I - f_{III})\xi_3 + (g_I - g_{III}) = 0, \tag{2.20}$$

на волне Σ_5

$$(q_{II} - q_{IV})\xi_5 + (h_{II} - h_{IV}) = 0. \tag{2.21}$$

На ударных волнах поворота Σ_4 и Σ_6 со скоростями G_4 и G_6 соответственно (рис. 6, b) также должны выполняться соотношения (2.16) и (2.17):

на волне Σ_4 :

$$\begin{gathered}(\mu+\gamma_1 m_{III})f_{III}-(\mu+\gamma_1 m_V)f_V=-\rho c^2\xi_4(g_{III}-g_V),\\ (\mu+\gamma_1 m_V)q_V=-\rho c^2\xi_4 h_V,\\ (f_{III}-f_V)\xi_4+(g_{III}-g_V)=0,\\ q_V\xi_4+h_V=0,\end{gathered}\tag{2.22}$$

на волне Σ_6 :

$$\begin{gathered}(\mu+\gamma_1 m_V)f_V=-\rho c^2\xi_6 g_V,\\ (\mu+\gamma_1 m_{IV})q_{IV}-(\mu+\gamma_1 m_V)q_V=-\rho c^2\xi_6(h_{IV}-h_V),\\ (q_{IV}-q_V)\xi_6+(h_{IV}-h_V)=0,\\ f_V\xi_6+g_V=0.\end{gathered}\tag{2.23}$$

где ξ_4 определяет положение фронта Σ_4 , ξ_6 — фронта Σ_6 .

Поскольку длина вектора сдвига $\bar{s}$ не изменяется на волнах поворота Σ_4 и Σ_6 , то необходимо выполнение на этих ударных волнах равенства длин векторов сдвига в III , IV и V зонах:

$$\begin{gathered}f_{III}^2=f_V^2+q_V^2,\\ q_{IV}^2=f_V^2+q_V^2.\end{gathered}\tag{2.24}$$

Уравнения (2.18)-(2.24) представляют собой систему четырнадцати нелинейных алгебраических уравнений относительно двенадцати неизвестных: ξ_3 , ξ_4 , ξ_5 , ξ_6 , f_{III} , g_{III} , q_{IV} , h_{IV} , f_V , q_V , g_V , h_V . Полученная система имеет две пары линейно зависимых уравнения (динамические условия совместности на волнах Σ_4 и Σ_6). Убирая из системы два линейно зависимых с другими уравнения, получаем следую-

щую замкнутую систему 12 уравнений относительно 12 неизвестных:

$$
\begin{gathered}
(\mu+\gamma_1 m_I)f_I-(\mu+\gamma_1 m_{III})f_{III}=-\rho c^2\xi_3(g_I-g_{III}),\\
(\mu+\gamma_1 m_{II})q_{II}-(\mu+\gamma_1 m_{IV})q_{IV}=-\rho c^2\xi_5(h_{II}-h_{IV}),\\
(\mu+\gamma_1 m_{III})f_{III}-(\mu+\gamma_1 m_V)f_V=-\rho c^2\xi_4(g_{III}-g_V),\\
(\mu+\gamma_1 m_{IV})q_{IV}-(\mu+\gamma_1 m_V)q_V=-\rho c^2\xi_6(h_{IV}-h_V),\\
(f_I-f_{III})\xi_3+(g_I-g_{III})=0,\\
(q_{II}-q_{IV})\xi_5+(h_{II}-h_{IV})=0,\\
(f_{III}-f_V)\xi_4+(g_{III}-g_V)=0,\\
q_V\xi_4+h_V=0,\\
(q_{IV}-q_V)\xi_6+(h_{IV}-h_V)=0,\\
f_V\xi_6+g_V=0,\\
f_{III}^2=f_V^2+q_V^2,\\
q_{IV}^2=f_V^2+q_V^2.
\end{gathered}
\tag{2.25}
$$

В обезразмеренном виде систему уравнений можно записать сле-

дующим образом:

$$
\begin{gathered}
(1+\tilde{\gamma}_1 m_I) f_I - (1+\tilde{\gamma}_1 m_{III}) f_{III} = -\xi_3^2 (g_I - g_{III}), \\
(1+\tilde{\gamma}_1 m_{II}) q_{II} - (1+\tilde{\gamma}_1 m_{IV}) q_{IV} = -\xi_5^2 (h_{II} - h_{IV}), \\
(1+\tilde{\gamma}_1 m_{III}) f_{III} - (1+\tilde{\gamma}_1 m_V) f_V = -\xi_4^2 (g_{III} - g_V), \\
(1+\tilde{\gamma}_1 m_{IV}) q_{IV} - (1+\tilde{\gamma}_1 m_V) q_V = -\xi_6^2 (h_{IV} - h_V), \\
(f_I - f_{III})\xi_3 + (g_I - g_{III}) = 0, \\
(q_{II} - q_{IV})\xi_5 + (h_{II} - h_{IV}) = 0, \\
(f_{III} - f_V)\xi_4 + (g_{III} - g_V) = 0, \\
q_V \xi_4 + h_V = 0, \\
(q_{IV} - q_V)\xi_6 + (h_{IV} - h_V) = 0, \\
f_V \xi_6 + g_V = 0, \\
f_{III}^2 = f_V^2 + q_V^2, \\
q_{IV}^2 = f_V^2 + q_V^2,
\end{gathered}
\tag{2.26}
$$

где

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\gamma_1}{\mu}.$$

Проведя некоторые преобразования в системе уравнений (2.26), найдем скорости ударных волн поворота ξ_4 и ξ_6:

$$\xi_4 = -\sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V}, \qquad \xi_6 = \sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V}. \tag{2.27}$$

Следовательно, скорости волн поворота ξ_4 и ξ_6 имеют одинаковое значение по модулю, но противоположны по направлению.

Таким образом, необходимо решить замкнутую систему 10 нелинейных алгебраических уравнений относительно 10 неизвестных (ξ_3 ,

ξ_5 , f_{III} , g_{III} , q_{IV} , h_{IV} , f_V , q_V , g_V , h_V):

$$
\begin{gathered}
(1+\tilde{\gamma}_1 m_I) f_I - (1+\tilde{\gamma}_1 m_V) f_{III} = -\xi_3^2 (g_I - g_{III}), \\
(1+\tilde{\gamma}_1 m_{II}) q_{II} - (1+\tilde{\gamma}_1 m_V) q_{IV} = -\xi_5^2 (h_{II} - h_{IV}), \\
\sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V}(f_{III} - f_V) = g_{III} - g_V, \\
-\sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V}(q_{IV} - q_V) = h_{IV} - h_V, \\
(f_I - f_{III})\xi_3 + (g_I - g_{III}) = 0, \\
(q_{II} - q_{IV})\xi_5 + (h_{II} - h_{IV}) = 0, \\
(f_{III} - f_V)\xi_4 + (g_{III} - g_V) = 0, \\
-q_V \sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V} + h_V = 0, \\
(q_{IV} - q_V)\sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V} + (h_{IV} - h_V) = 0, \\
f_V \sqrt{1+\tilde{\gamma}_1 m_V} + g_V = 0, \\
f_{III}^2 = f_V^2 + q_V^2, \\
q_{IV}^2 = f_V^2 + q_V^2.
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

Численное решение системы нелинейных уравнений (2.28), полученное при заданных постоянных материала и граничных условиях (2.17), необходимо проверить на выполнение термодинамического условия совместности (1.72).

Рассмотрим решение задачи при следующих краевых условиях: $\mu^{-1}\sigma_{21}\big|_{x_1=-h_1} = -0{,}005$ и $\mu^{-1}\sigma_{31}\big|_{x_1=h_2} = 0{,}005$. В результате численного решения нелинейной системы уравнений (2.28) при таких краевых условиях получено, что сдвиговые волны Σ_3 и Σ_5 действительно приводят к увеличению предварительных сдвигов, а ударные волны поворота Σ_4 и Σ_6 изменяют направленность сдвига: на Σ_4 становится отличной от нуля компонента $u_{3,1}$ и соответственно уменьшается $u_{2,1}$; аналогично, на волне Σ_6 компонента $u_{3,1}$ увеличивается, а $u_{2,1}$ пере-

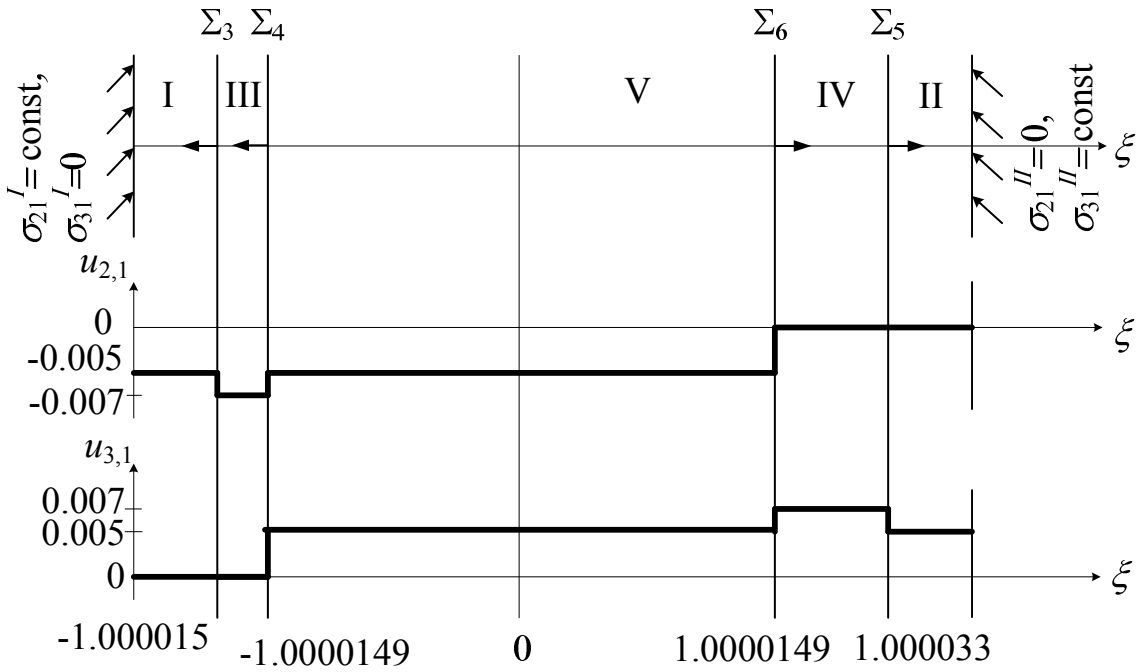


Рис. 7. Диаграмма распределения параметров напряженно-деформированного состояния среды при отражении четырех ударных волн

стает быть равной нулю.

Диаграммы распределения параметров напряженно-деформированного состояния среды по зонам $I-IV$ между ударными волнами Σ_3, Σ_4, Σ_5 и Σ_6 представлены на рис. 7.

Проведенная серия вычислительных экспериментов показала, что при увеличении нагрузки (например, на границе $x_1 = -h_1$) абсолютные значения скоростей ударных волн также увеличиваются. При этом приращение скоростей G_3 и G_5 волн нагрузки больше, чем скоростей $G_4 = G_6$ волн поворота, что приводит к росту ширины областей III и IV.

Давление в зонах $III-V$ вычисляется из соотношения (2.11) и зависит только от начального гидростатического давления P_0 и гради-

ентов перемещений $u_{2,1}$, $u_{3,1}$ в соответствующей зоне:

$$P_{III} = P_0 - \beta_1 f_3^2 - \beta_2 f_3^4 + \ldots,$$
$$P_{IV} = P_0 - \beta_1 q_4^2 - \beta_2 q_4^4 + \ldots \tag{2.29}$$

На ударных волнах поворота Σ_4 и Σ_6 добавочное гидростатическое давление P не изменяется: $P_{III} = P_{IV} = P_V$. Полученные численные значения давления по зонам $I - V$ при заданном $\mu^{-1}P_0 = 0{,}001$ представлены на рис. 8.

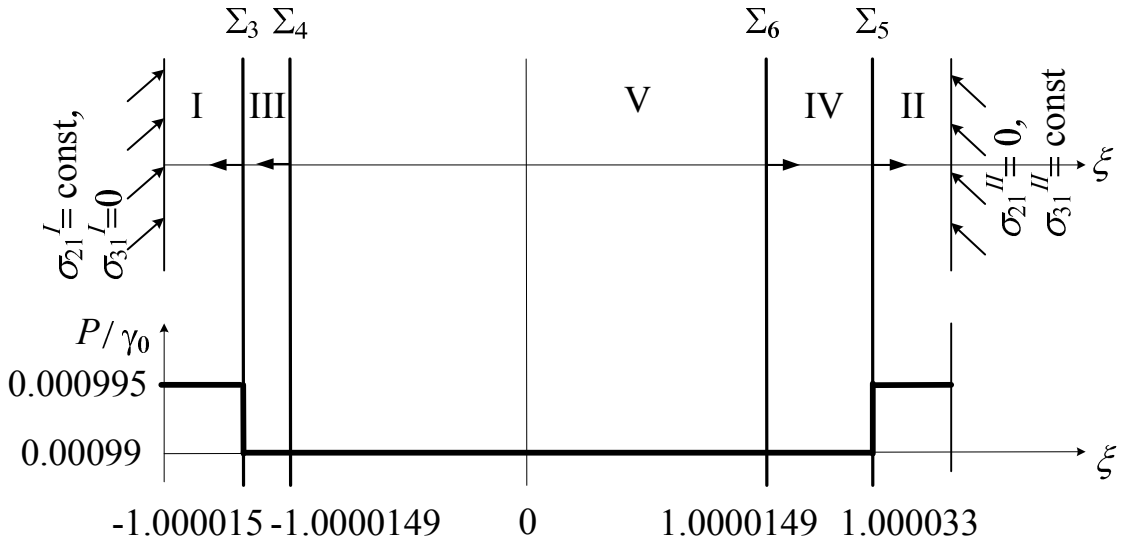


Рис. 8. Диаграмма распределения давления по зонам при отражении четырех ударных волн

Увеличение нагрузки на какой-либо из границ приводит к тому, что давление в зоне за отраженной ударной сдвиговой волной уменьшается. Например, при увеличении нагрузки на границе $x_1 = -h_1$ (параметр f_I), давление в зоне III уменьшится, а в зоне IV останется без изменений.

2.2.2 Возникновение в отраженном пакете простой волны Римана

Рассмотрим теперь случай, когда на границах слоя заданы постоянные предварительные сдвиги такие (рис. 9, а), что

$$|\bar{s}_I| < |\bar{s}| < |\bar{s}_{II}|. \tag{2.30}$$

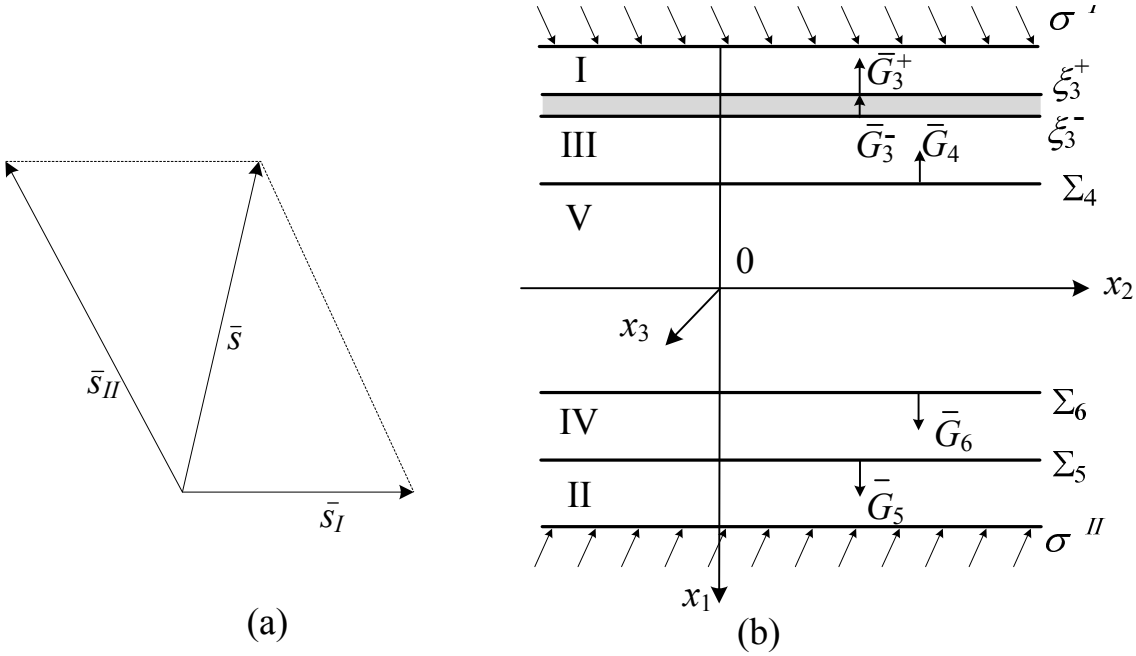


Рис. 9. Отражение смешанного пакета и пакета из ударных волн

Данное соотношение заданных и результирующих сдвиговых деформаций реализуется при краевых условиях

$$\begin{gathered} u_{2,1}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = f_I = \text{const} < 0, \quad u_{3,1}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = q_I = \text{const}, \\ u_{2,1}^{II}\big|_{x_1=h_2} = 0, \quad u_{3,1}^{II}\big|_{x_1=h_2} = q_2 = \text{const} > 0, \\ (u_{2,1}^{I})^2 + (u_{3,1}^{I})^2 > (u_{3,1}^{II})^2. \end{gathered} \tag{2.31}$$

Аналогично предыдущей постановке задачи, до момента столкновения в среде распространяются навстречу друг другу две сдвиговые

ударные волны Σ_1 и Σ_2 со скоростями

$$G_1 = c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1(f_I^2 + q_I^2) + \ldots\right\}^{1/2},$$
$$G_2 = -c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1 q_{II}^2 + \ldots\right\}^{1/2}, \tag{2.32}$$

причем $G_1 > G_2$. Деформированное состояние за фронтами Σ_1 и Σ_2 определяется, как и раньше, только параметрами (2.31) и имеет вид

$$\upsilon_2^I = -f_I G_1, \quad \upsilon_3^I = -q_I G_I,$$
$$\upsilon_2^{II} = 0, \quad \upsilon_3^{II} = q_{II} G_2,$$
$$P_I = P_0 - \beta_1(f_I^2 + q_I^2) - \beta_2(f_I^2 + q_I^2)^2 + \ldots, \tag{2.33}$$
$$P_{II} = P_0 - \beta_1 q_{II}^2 - \beta_2 q_{II}^4 + \ldots.$$

При отражении волновых фронтов обратно в уже деформированную зону I уменьшение предварительного сдвига s_{II} в соответствии с условием (2.30) может произойти только на простой волне Римана с фронтами $\xi = \xi_3^+$ и $\xi = \xi_3^-$ (рис. 9, б). За простой волной следует ударная волна поворота Σ_4, на которой происходит изменение направленности вектора сдвига. Второй волновой пакет, отраженный в зону II, как и раньше, состоит из двух ударных фронтов – волны нагрузки Σ_5, увеличивающей предварительные сдвиговые деформации, и волны поворота Σ_6, меняющей их поляризацию в соответствии с условием (2.30).

Скорости переднего и заднего фронта простой волны вычисляются из соотношений (2.9). Решение в области простой волны вычисляется интегрированием уравнения движения (1.22) при $\xi_3 \in [\xi_3^-; \xi_3^+]$. Скорости ударных волн G_4, G_5, G_6 и параметры деформирования среды между волнами в зонах IV и V, аналогично предыдущей постановке задачи, определяются из системы уравнений, состоящей из трех блоков (по числу отраженных ударных волн), каждый из которых состоит из

условий непрерывности перемещений на ударной волне (2.16) и динамических условий совместности разрывов (2.17) (по 4 уравнения для волн G_4 и G_6 и 2 уравнения для волны G_5). В следствие того, что длина вектора сдвига $\bar{s}$ не изменяется на волнах поворота Σ_4 и Σ_6, то необходимо выполнение на этих ударных волнах равенства длин векторов сдвига в III, IV и V зонах (2.27). Таким образом, получаем систему двенадцати нелинейных алгебраических уравнений относительно тринадцати неизвестных: ξ_4, ξ_5, ξ_6, f_{III}, q_{III}, g_{III}, h_{III}, q_{IV}, h_{IV}, f_V, q_V, g_V, h_V.

Результаты численного решения задачи в данной постановке при краевых условиях $\mu^{-1}\sigma_{21}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = -0{,}005$, $\mu^{-1}\sigma_{31}^{I}\big|_{x_1=-h_1} = 0{,}007$, $\mu^{-1}\sigma_{31}^{II}\big|_{x_1=h_2} = 0{,}006$, $\mu^{-1}\sigma_{21}^{II}\big|_{x_1=h_2} = 0$ представлены на рис. 10.

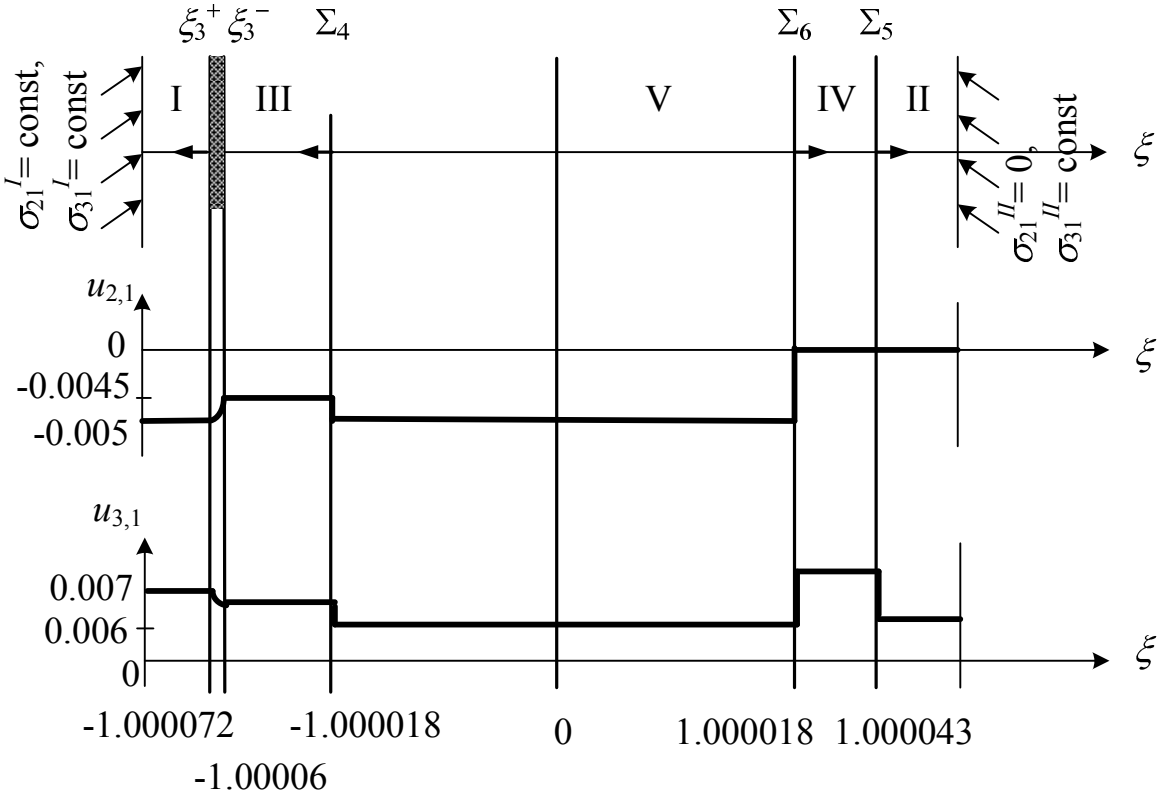


Рис. 10. Диаграмма распределения параметров напряженно-деформированного состояния среды при отражении ударных волн и простой волны Римана

Действительно, простая волна Римана приводит к уменьшению предварительного сдвига, а сдвиговая ударная волна Σ_5, наоборот, приводит к увеличению предварительного сдвига. Таким образом, длины векторов предварительных сдвигов s_I и s_{II} становятся одинаковыми. Ударные волны поворота Σ_4 и Σ_6, как и в предыдущем случае, имеют одинаковое значение по модулю. Они изменяют направление сдвига: на волне Σ_6 компонента $u_{3,1}$ увеличивается, а $u_{2,1}$ перестает быть равной нулю.

Необходимо заметить, что с увеличением нагрузки на границу слоя $x_1 = -h_1$ ширина области простой волны увеличивается.

Давление в зонах III и IV зависит только от начального гидростатического давления P_0 и градиентов перемещений $u_{2,1}$, $u_{3,1}$ в соответствующей зоне и определяются соотношениями (2.29). Добавочное гидростатическое давление в области простой волны $\xi_3 \in [\xi_3^-; \xi_3^+]$ меняется непрерывно от значения $P_0|_{\xi=\xi_3^+}$ до значения $P|_{\xi=\xi_3^-}$, которое определяется из соотношения (2.11). На ударной волне поворота значение добавочного гидростатического давления не изменяется. Полученные в результате численного эксперимента значения функции давления по зонам $I - V$ при заданном $\mu^{-1}P_0 = 0{,}001$ представлены на рис. 11.

Увеличение нагрузки на какой-либо из границ приводит к тому, что давление в зоне за отраженной ударной сдвиговой волной, а соответственно, и за волной поворота, уменьшается. Например, при увеличении нагрузки на границе $x_1 = -h_1$ (параметры f_I и q_I), давление в зонах III и V уменьшится, а в зоне IV останется без изменений.

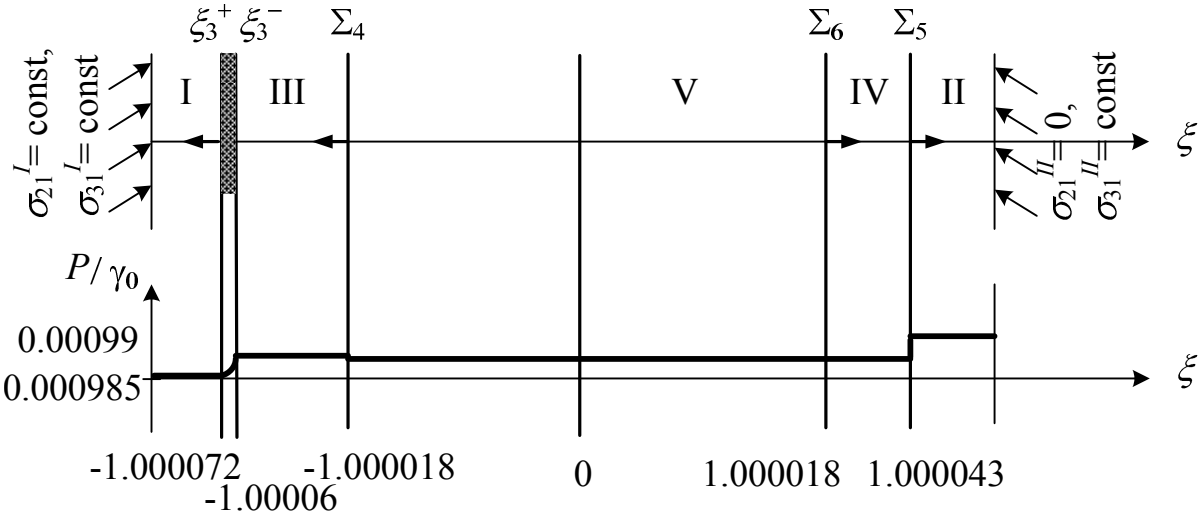


Рис. 11. Диаграмма распределения давления по зонам при отражении смешанного пакета и пакета из ударных волн

2.2.3 Отражение простых волн Римана

Рассмотрим теперь случай, когда на границах слоя заданы постоянные предварительные сдвиги (рис. 12, а) такие, что

$$|\bar{s}_I| < |\bar{s}_{II}| < |\bar{s}|. \tag{2.34}$$

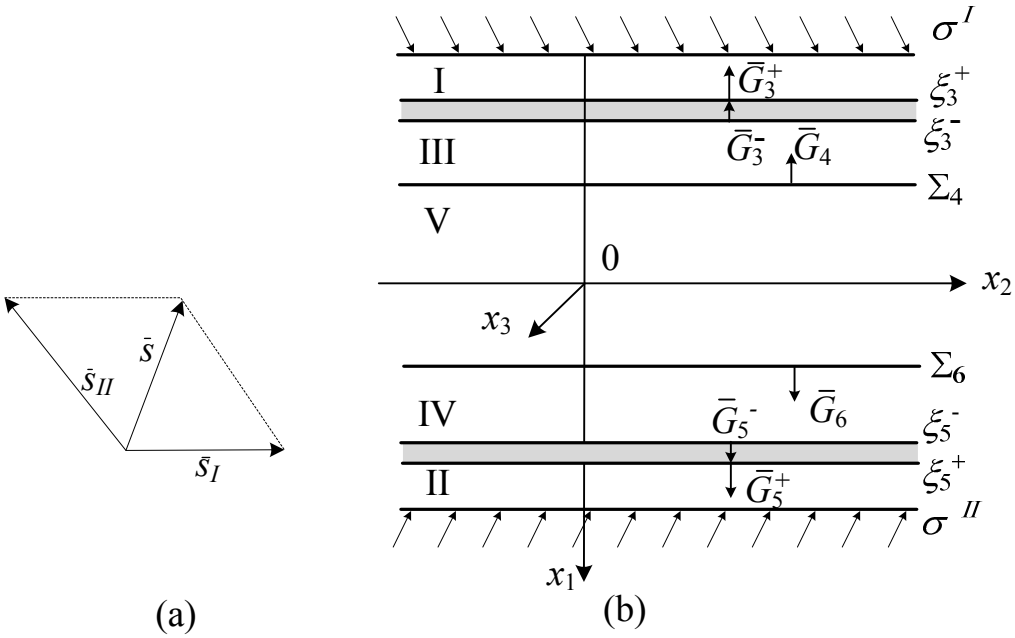


Рис. 12. Отражение простых волн Римана и ударных волн поворота

Соотношение (2.34) имеет место, если напряженно-деформированное состояние за идущими навстречу друг другу волнами нагрузки Σ_1 и Σ_2 определяется в общем случае параметрами

$$\begin{gathered} u^I_{2,1}\big|_{x_1=-h_1} = f_1 = \mathrm{const} < 0, \quad u^I_{3,1}\big|_{x_1=-h_1} = q_1 = \mathrm{const} < 0, \\ u^{II}_{2,1}\big|_{x_1=h_2} = f_2 = \mathrm{const} > 0, \quad u^{II}_{3,1}\big|_{x_1=h_2} = q_2 = \mathrm{const} > 0, \\ (u^I_{2,1})^2 + (u^I_{3,1})^2 > (u^I_{2,1}I)^2 + (u^{II}_{3,1})^2. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Как частный случай, нагрузку на границах слоя возможно задать таким образом, чтобы состояние в зонах I и II определялось теми же параметрами, что и в предыдущем случае, т.е. соотношениями (2.31). В этом случае скорости волн нагрузки Σ_1 и Σ_2 вычисляются согласно соотношениям (2.32), а скорости движения точек среды и давление в зонах I и II между волновыми фронтами и границами несжимаемого слоя – соотношениями (2.33). Однако, для выполнения условия (2.34) необходимо, чтобы угол α между плоскостями поляризации волн нагрузки Σ_1 и Σ_2 и отношение длин заданных векторов $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$ удовлетворяли неравенству (выделенная область на рис. 13)

$$\frac{|\bar{s}_{II}|}{|\bar{s}_I|} < -2\cos\alpha, \quad \alpha \in [2\pi/3, \pi]. \tag{2.36}$$

В общем случае, когда вектора сдвигов s_I и s_{II} определяются компонентами из соотношений (2.35), скорости волн нагрузки Σ_1 и Σ_2, скорости движения точек среды и давление в зонах I, II принимают

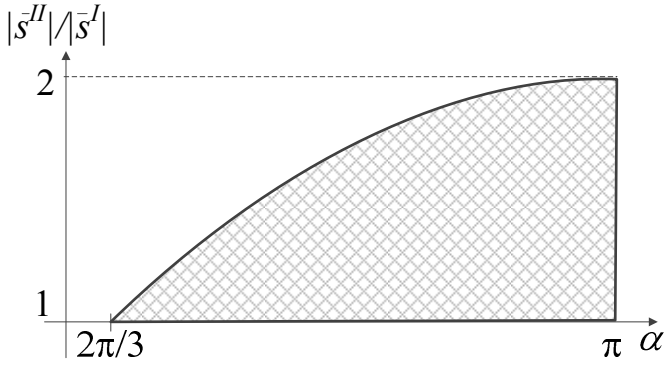


Рис. 13. Соотношение параметров, когда возможен случай отражения простых волн Римана и ударных волн поворота

значения

$$
\begin{gathered}
G_1 = c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1(f_I^2 + q_I^2) + \ldots\right\}^{1/2}, \\
G_2 = -c\left\{1 + \mu^{-1}\gamma_1(f_{II}^2 + q_{II}^2) + \ldots\right\}^{1/2}, \\
\upsilon_2^I = -f_I G_1, \quad \upsilon_3^I = -q_I G_I, \\
\upsilon_2^{II} = f_{II} G_2, \quad \upsilon_3^{II} = q_{II} G_2, \\
P_I = P_0 - \beta_1(f_I^2 + q_I^2) - \beta_2(f_I^2 + q_I^2)^2 + \ldots, \\
P_{II} = P_0 - \beta_1(f_{II}^2 + q_{II}^2) - \beta_2(f_{II}^2 + q_{II}^2)^2 + \ldots.
\end{gathered}
\tag{2.37}
$$

В результате взаимодействия двух волн нагрузки Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны, согласно свойствам ударных волн нагрузки и центрированных волн, начинают двигаться сначала простые волны Римана, а следом ударные волны поворота. В случае удовлетворения краевых условий задачи соотношениям (2.34), (2.36), уменьшение предварительных сдвигов $|\bar{s}_I|$, $|\bar{s}_{II}|$ до значения $|\bar{s}|$ при отражении волновых пакетов обратно в уже деформированные зоны I и II (рис. 12, б) может произойти только на простых волнах Римана с фронтами $\xi_3 \in [\xi_3^+, \xi_3^-]$ и $\xi_5 \in [\xi_5^+, \xi_5^-]$. Ориентирование векторов сдвига $\bar{s}_{III}$ и $\bar{s}_{IV}$, полученных за простыми волнами в зонах III и IV, коллинеарно результирующему вектору $\bar{s}$ происходит на ударных волнах поворота

Σ_4 и Σ_6.

Скорости передних ξ_3^+, ξ_5^+ и задних ξ_3^-, ξ_5^- фронтов простых волн вычисляются из соотношений (2.9). Решение в областях простых волн вычисляется интегрированием уравнения движения (1.22) при $\xi_3 \in [\xi_3^-; \xi_3^+]$ и $\xi_5 \in [\xi_5^-; \xi_5^+]$. Для определения скоростей ударных волн поворота G_4, G_6 и параметров деформирования среды между волнами в зонах IV и V, аналогично предыдущей постановке задачи, необходимо записать систему уравнений, состоящую из двух блоков, каждый из которых включает условия непрерывности перемещений на ударной волне (2.16) и динамические условия совместности разрывов (2.17) (по 4 уравнения для волн G_4 и G_6). В силу того, что длина вектора сдвига $\bar{s}$ не изменяется на волнах поворота Σ_4 и Σ_6, то необходимо выполнение соотношений (2.27) в зонах III, IV и V.

В результате проведения численного эксперимента задачи в такой постановке при краевых условиях $\mu^{-1}\sigma_{21}^{I}\big|_{x_1=-h_1}=-0{,}005$, $\mu^{-1}\sigma_{31}^{I}\big|_{x_1=-h_1}=0{,}004$, $\mu^{-1}\sigma_{31}^{II}\big|_{x_1=h_2}=0{,}0049$, $\mu^{-1}\sigma_{21}^{II}\big|_{x_1=h_2}=0{,}0045$ были получены следующие результаты, представленные на рис. 14. Действительно, простые волны Римана приводят к уменьшению предварительных сдвигов, в результате чего длины векторов s_I и s_{II} становятся одинаковыми. Ударные волны поворота Σ_4 и Σ_6, как и в случае предыдущих постановок, изменяют направление сдвига. Скорости волн поворота равны, но противоположны по направлению.

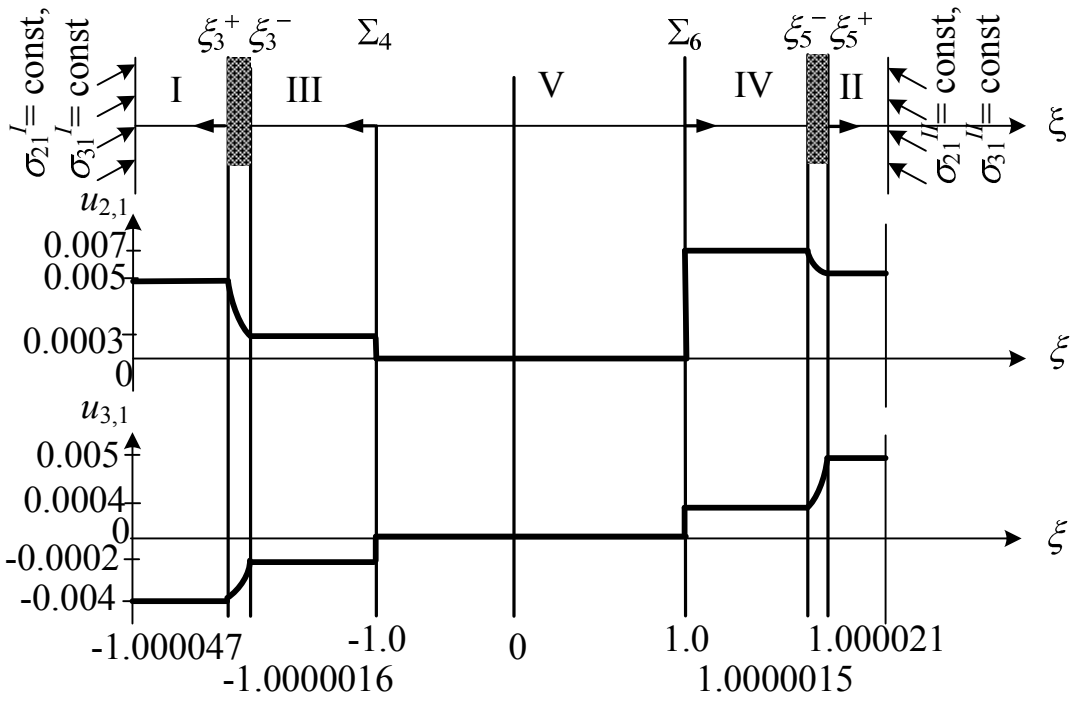


Рис. 14. Диаграмма распределения параметров напряженно-деформированного состояния среды при отражении простых волн Римана и ударных волн поворота

Увеличение нагрузки на границы слоя приводит к увеличению ширины области простой волны.

Добавочное гидростатическое давление в зонах III и IV, согласно соотношениями (2.29), зависит только от начального гидростатического давления P_0 и градиентов перемещений $u_{2,1}$, $u_{3,1}$ в соответствующей зоне. В области простых волн $\xi_3 \in [\xi_3^-; \xi_3^+]$ и $\xi_5 \in [\xi_5^-; \xi_5^+]$ давление, вычисляемое из соотношения (2.11), меняется непрерывно от значения $P_0|_{\xi=\xi_3^+}$ до значения $P|_{\xi=\xi_3^-}$ и от $P_0|_{\xi=\xi_5^+}$ до $P|_{\xi=\xi_5^-}$ соответственно. На ударной волне поворота значение добавочного гидростатического давления не изменяется. Полученные в результате численного эксперимента значения функции давления по зонам $I-V$ при заданном $\mu^{-1}P_0 = 0{,}001$ представлены на рис. 15.

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод, что увеличение нагрузки на какой-либо из границ приводит к уменьше-

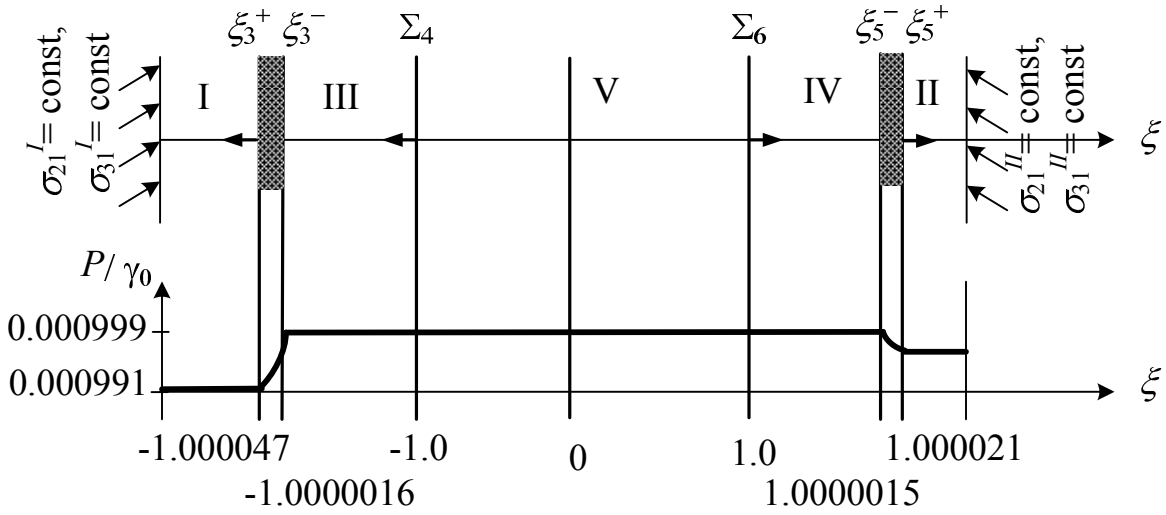


Рис. 15. Диаграмма распределения давления по зонам при отражении простых и ударных волн

нию давления в зоне за отраженной ударной сдвиговой волной.

Таким образом, проверяя соответствие краевых условий задачи соотношениям (2.13), (2.30), (2.34), (2.36) можно заранее, на этапе постановки, определить характер возникающих волновых фронтов, а следовательно, существенно упростить процесс решения.

3. Задачи одноосного ударного деформирования разномодульной упругой среды

3.1 Возникновение ударной волны при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства

Рассмотрим разномодульное упругое полупространство, находящееся в свободном состоянии до начала деформирования. Разномодульные свойства материала зададим упругим потенциалом (1.23). Прямоугольную декартову систему координат выберем так, чтобы граничная плоскость совпадала с координатной плоскостью $\{x_2, x_3\}$, а ось x_1 была направлена вглубь полупространства. Будем изучать только такие движения точек среды, когда единственная ненулевая компонента вектора перемещений u_1 зависит только от одной пространственной координаты x_1: $u_1(x_1, t) = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$, что соответствует одноосному деформированию.

Пусть с момента времени $t = t_0 = 0$ на границу $x = 0$ полупространства начинает действовать нагрузка, приводящая к движению точек граничной плоскости по закону $u(0, t) = \varphi(t)$. Будем считать, что функция $\varphi(t)$ гладкая, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет следующим условиям (рис. 16):

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2,\\
&\varphi(0) = 0,\\
&\varphi'(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_1,\\
&\varphi'(t_1) = 0,\\
&\varphi'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > t_1,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где t_1 – момент времени, когда функция $\varphi(t)$ достигает своего минимального значения.

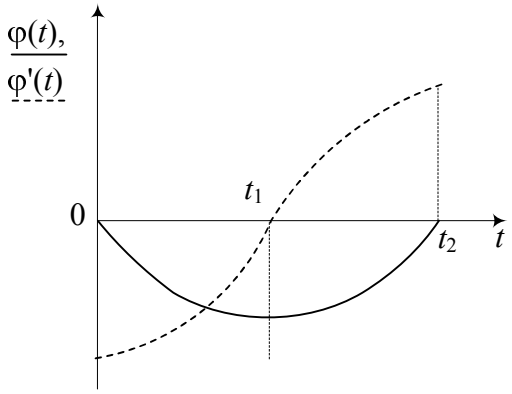


Рис. 16. Функции перемещений и скорости перемещений точек границы упругого разномодульного полупространства

Будем считать, что функция $\varphi(t)$ является полиномом второй степени, поскольку это наиболее простой вид функции, удовлетворяющий описанным требованиям (3.1). Любую другую функцию, удовлетворяющую требованиям (3.1), можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться слагаемыми до второй степени включительно.

Согласно выбранной функции нагружения $\varphi(t)$, полупространство сначала подвергается растяжению, а затем с момента времени $t = t_1$ начинается сжатие.

Рассмотрим промежуток времени $t < t_1$. В области $0 \leqslant x < ct$ (зона I на рис. 17) справедливо уравнение движения (1.31), где $c = b$. Решение д'Аламбера (1.33) для него имеет вид

$$u^I = f_1\left(t - \frac{x}{b}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{b}\right), \tag{3.2}$$

где f_1, g_1 – неизвестные функции.

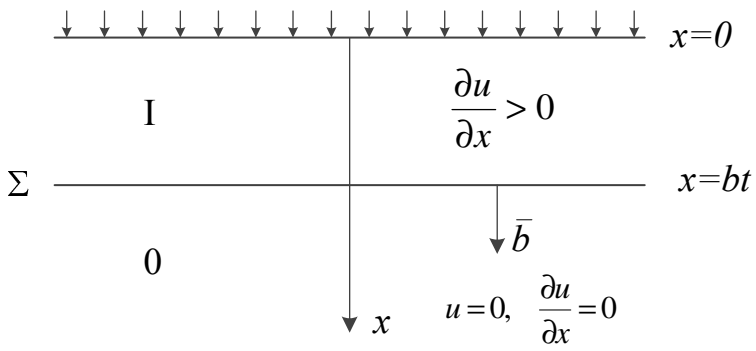


Рис. 17. Волновая картина, возникающая при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства при $0 \leqslant t < t_1$

Граничное условие задачи

$$u\Big|_{x=0} = \varphi(t) \tag{3.3}$$

и условие непрерывности перемещений на плоскости разрыва $\Sigma(t)$

$$[u]\Big|_{x=bt} = 0 \tag{3.4}$$

позволяют определить неизвестные функции f_1 и g_1 в решении д'Аламбера (3.2). Подставим решение (3.2) в граничные условия (3.3) и (3.4) и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(t) + g_1(t) = \varphi(t), \\ f_1(0) + g_1(2t) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Выражая из второго уравнения системы функцию $g_1(\xi(t))$ и подставляя в первое уравнение, получим решение задачи при $0 \leqslant t < t_1$ (рис. 18):

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant bt, \\ 0 & \text{при } x \geqslant bt. \end{cases} \tag{3.6}$$

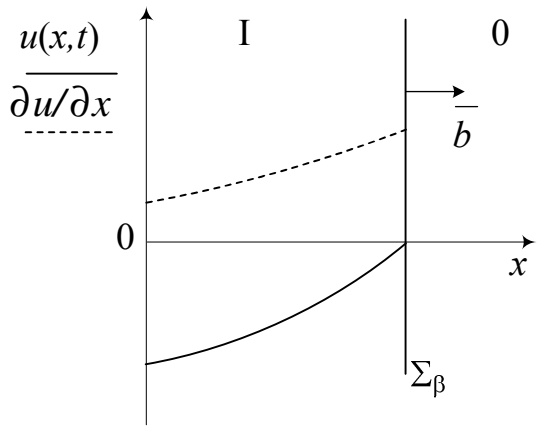


Рис. 18. Решение задачи в интервале времени $0 \leqslant t < t_1$

Таким образом, поскольку перед волной $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, за волной $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$, то в момент времени $t = 0$ от границы полупространства отделяется медленный полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ – волна разрежения. Перед фронтом полусигнотона $x = bt$ среда недеформирована, за фронтом до момента t_1 среда подвергается растяжению.

С момента времени $t = t_1$ на границу полупространства начинает действовать сжимающее усилие ($\varphi'(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_1$). Вследствие такого воздействия, согласно введенной в § 1.5 классификации разрывов, переход из растянутого состояние в сжатое среда может осуществлять только посредством ударной волны $\Sigma_\alpha(t)$, фронт которой $x = \int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi)d\xi$ движется вслед за волной разрежения $\Sigma_\beta(t)$ (рис. 19). На ударной волне производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ скачком меняет значение с положительного (в зоне I на рис. 19) на отрицательное (в зоне II на рис. 19). Появление такого скачка обусловлено кусочно-линейным видом зависимости (1.30): в области $\int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi)d\xi \leqslant x \leqslant bt$ среда растягивается и в уравнении движения (1.31) фазовая скорость $c = b$; в области $0 \leqslant x \leqslant \int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi)d\xi$ среда подвергается сжатию и фазовая скорость уравнения движения $c = a$.

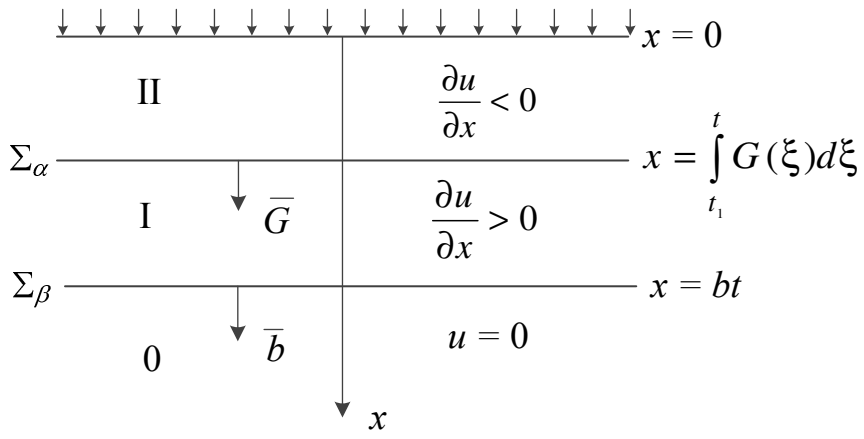


Рис. 19. Волновая картина ударного одноосного деформирования разномодульного упругого полупространства при $t \geqslant t_1$

Решение в области II на рис. 19 также представляется решением д'Аламбера

$$u^{II} = f_2\left(t - \frac{x}{a}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{a}\right). \tag{3.7}$$

Неизвестные функции f_2 и g_2 определим из граничных условий задачи: соотношения (3.3) на границе полупространства и условия непрерывности перемещений на плоскости разрывов $\Sigma_\alpha(t)$

$$[u]\Big|_{x=\int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi)d\xi} = 0. \tag{3.8}$$

Скорость ударной волны G_α определим из соотношения (1.81). С двух сторон от ударной волны $\Sigma_\alpha(t)$ коэффициент k имеет значения $k^+ = 1$, $k^- = -1$, а его скачок на ударной волне $[k] = 2$. Согласно геометрическим и кинематическим условиям совместности (1.74), (1.75) для скорости ударной волны из (1.81) получим:

$$2G^2(t) = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\frac{u^I_{,1} + u^{II}_{,1}}{u^I_{,1} - u^{II}_{,1}}. \tag{3.9}$$

Из граничных условий (3.3) и (3.8) с учетом (3.7) следует

$$
\begin{gathered}
f_2(t) + g_2(t) = \varphi(t), \\
\varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) - f_2\left(t - \frac{x}{a}\right) - g_2\left(t + \frac{x}{a}\right) = 0, \\
x = \int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi) d\xi.
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Предположим, что скорость ударной волны постоянна, тогда фронт ударной волны $x = G(t - t_1)$. Т.к. $\varphi(t)$ выбрали в виде полинома второй степени, о представим $\varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) = \varphi\left(t - \frac{G(t-t_1)}{b}\right)$ в виде разложения в ряд Тейлора в точке t_1:

$$
\begin{gathered}
\varphi\left(t - \frac{G(t-t_1)}{b}\right) = \varphi\left(\left(1 - \frac{G}{b}\right) t + \frac{G}{b} t_1\right) = \\
= \varphi(t_1) + \varphi'(t_1)\left(1 - \frac{G}{b}\right)(t - t_1) + \frac{1}{2}\varphi''(t_1)\left(1 - \frac{G}{b}\right)^2 (t - t_1)^2 + \ldots
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Аналогично разложим в ряды Тейлора функции $f_2\left(t - \frac{x}{a}\right)$ и $g_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$:

$$
\begin{gathered}
f_2\left(t - \frac{G(t-t_1)}{a}\right) = f_2\left(\left(1 - \frac{G}{a}\right) t + \frac{G}{a} t_1\right) = \\
= f_2(t_1) + f_2'(t_1)\left(1 - \frac{G}{a}\right)(t - t_1) + \frac{1}{2} f_2''(t_1)\left(1 - \frac{G}{a}\right)^2 (t - t_1)^2 + \ldots \\
g_2\left(t - \frac{G(t-t_1)}{a}\right) = g_2\left(\left(1 - \frac{G}{a}\right) t + \frac{G}{a} t_1\right) = \\
= g_2(t_1) + g_2'(t_1)\left(1 - \frac{G}{a}\right)(t - t_1) + \frac{1}{2} g_2''(t_1)\left(1 - \frac{G}{a}\right)^2 (t - t_1)^2 + \ldots
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

Подставляем полученные выражения (3.11) и (3.12) во второе уравнение (3.10). С учетом первого соотношения (3.10) и условия $\varphi'(t_1) = 0$ получим дифференциальное уравнение

$$
\varphi''(t_1)\left(G\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)(t - t_1) = \frac{4}{a} f_2'(t_1) + \frac{4}{a} f_2''(t_1)(t - t_1), \tag{3.13}
$$

откуда видно, что $f_2'(t_1) = 0$. Следовательно, согласно первому соотношению из (3.10), $g_2'(t_1) = 0$. Таким образом, нам известны первые и вторые производные от функций $f_2(t_1)$ и $g_2(t_1)$.

Для определения скорости ударной волны, представим в соотношении (3.9) сумму и разность градиентов перемещений тоже в виде рядов

$$
\begin{aligned}
&u_{,1}^{I} + u_{,1}^{II} = \\
&= -\frac{1}{b}\varphi'\left(t - \frac{G(t-t_1)}{b}\right) - \frac{1}{a}f_2'\left(t - \frac{G(t-t_1)}{a}\right) + \frac{1}{a}g_2'\left(t + \frac{G(t-t_1)}{a}\right) = \\
&\qquad = (t-t_1)\varphi''(t_1)\left(-\frac{2}{b} + \frac{G}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right)\right), \\
&u_{,1}^{I} - u_{,1}^{II} = \\
&= -\frac{1}{b}\varphi'\left(t - \frac{G(t-t_1)}{b}\right) + \frac{1}{a}f_2'\left(t - \frac{G(t-t_1)}{a}\right) - \frac{1}{a}g_2'\left(t + \frac{G(t-t_1)}{a}\right) = \\
&\qquad = -(t-t_1)\varphi''(t_1)\frac{G}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Получим кубическое уравнение относительно скорости ударной волны G

$$G^3 + 2aG - 4a^2 d = 0,$$

решением которого по формуле Кардано будет один действительный корень

$$G_\alpha = \sqrt[3]{\frac{a^2}{9}}\frac{\sqrt[3]{\left(9b + \sqrt{3}\sqrt{a^2 + 27b^2}\right)^2} - \sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{9b + \sqrt{3}\sqrt{a^2 + 27b^2}}}, \qquad (3.15)$$

являющийся скоростью ударной волны, зависящей только от a и b, причем $b < G_\alpha < a$ ($\nu < \frac{\lambda}{2} + \mu$). Следует отметить, что полученное выражение для скорости ударной волны является частным случаем, соответствующим только квадратичной функции $\varphi(t)$. В других случаях скорость движения ударной волны оказывается зависящей от времени.

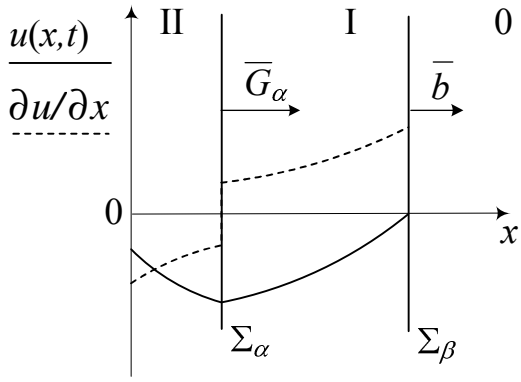


Рис. 20. Решение задачи при $t \geqslant t_1$

Для того, чтобы определить перемещения $u(x,t)$ в области II, в соотношение (3.7) подставим разложения функций в ряды Тейлора (3.11) и (3.12). Таким образом, решение задачи при $t \geqslant t_1$ имеет вид (рис. 20):

$$u(x,t)=\begin{cases} \varphi(t_1)+\dfrac{\varphi''(t_1)}{2}\left\{(t-t_1)^2+\dfrac{x^2}{a^2}\dfrac{2a^2b+G_\alpha(b^2-a^2)}{a^2b^2}(t-t_1)x\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant G_\alpha(t-t_1), \\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{b}\right) \qquad\qquad \text{при } G_\alpha(t-t_1) \leqslant x \leqslant bt, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } x \geqslant bt, \end{cases} \tag{3.16}$$

Решение (3.16) удовлетворяет термодинамическому условию совместности разрывов (1.65) на полусигнотоне $x = bt$ и ударной волне $x = G_\alpha(t-t_1)$.

Следует особо отметить, что решение (3.16), полученное здесь для кусочно-линейной среды, существенным образом отличается от решений аналогичной краевой задачи в рамках как классической линейной теории, так и для нелинейных сред с нормальной изотропией. С одной стороны, показано, что обобщенное решение уравнения движения при деформировании кусочно-линейной среды допускает возникновение ударной волны, что невозможно в рамках линейной теории. С другой стороны, скорость ударной волны оказывается постоянной и не зави-

сящей от времени, в отличие от нелинейных теорий, где скорости поверхностей сильных разрывов зависят не только от времени, но и от деформированного состояния перед волной и интенсивности разрыва.

3.2 Возникновение области постоянных перемещений при одноосном ударном деформировании разномодульного упругого полупространства

Зададим теперь функцию перемещений точек граничной плоскости $x = 0$ разномодульного упругого полупространства $x \geqslant 0$ таким образом, чтобы начиная с момента времени $t = 0$ полупространство сначала подвергалось сжатию, а затем с момента $t = t_1$ – растяжению. Точки граничной плоскости движутся по закону $u(0,t) = \varphi(t)$. Функция $\varphi(t)$, аналогично предыдущей задаче, гладкая, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет следующим условиям (рис. 21):

$$\begin{aligned} &\varphi(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2, \\ &\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(t_1) = 0, \\ &\varphi'(t) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_1, \\ &\varphi'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t > t_1, \end{aligned} \tag{3.17}$$

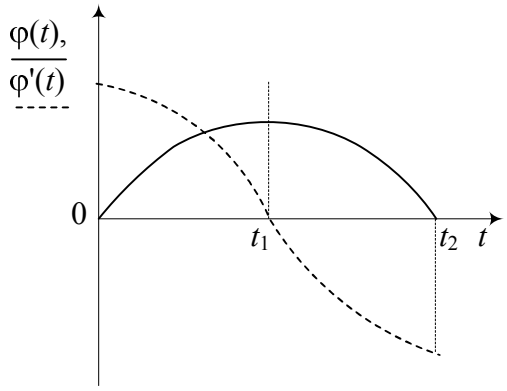


Рис. 21. Функции перемещений и скорости перемещений точек границы упругого разномодульного полупространства

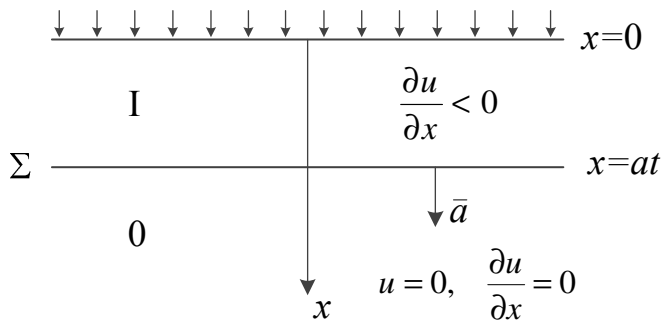


Рис. 22. Волновая картина, возникающая при одноосном сжатии разномодульного упругого полупространства при $0 \leqslant t < t_1$

В момент времени $t = 0$ от границы $x = 0$ отделяется фронт с координатой $x = ct$. В области $0 \leqslant x < ct$ (зона I на рис. 22) справедливо уравнение движения (1.31), где $c = a$. Решение д'Аламбера (1.33) в этом случае будет иметь вид

$$u^I = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{a}\right). \tag{3.18}$$

Неизвестные функции f_1 и g_1 в решении д'Аламбера (3.18) определим из граничного условия (3.3) и условия непрерывности перемещений на плоскости разрыва $\Sigma(t)$

$$[u]\Big|_{x=at} = 0. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.18) в граничные условия (3.3) и (3.19), получим систему уравнений, аналогичную (3.5), из которой следует решение задачи при $0 \leqslant t < t_1$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant at, \\ 0 & \text{при } x \geqslant at. \end{cases} \tag{3.20}$$

Таким образом, в момент времени $t = 0$ от границы полупространства отделяется быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ – волна сжатия, которая со скоростью $c = a$ несет в недеформированное полупространство сжимающие граничные возмущения (рис. 23).

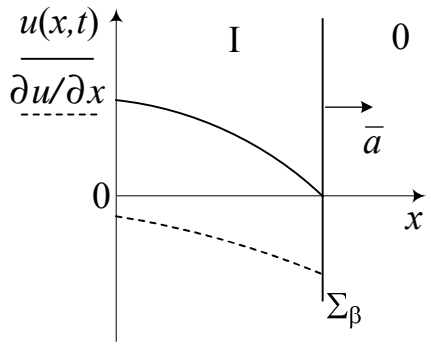


Рис. 23. Решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant t_1$

В момент времени $t = t_1$ изменяется поведение функции нагружения – $\varphi'(t) < 0$, т. е. деформации меняют знак с отрицательного на положительный. Таким образом, как показано в § 1.5, в момент времени $t = t_1$ возникновение ударной волны невозможно. Согласно введенной в § 1.5 классификации разрывов, при данном режиме нагрузки на границе $x = 0$ могут возникнуть только два простых разрыва: быстрый $\Sigma_{\delta_1}(t)$ со скоростью a и координатой фронта $x = a(t - t_1)$ и медленный $\Sigma_{\delta_2}(t)$ со скоростью b и координатой фронта $x = b(t - t_1)$ (рис. 24). Поскольку скорость быстрого простого разрыва оказывается больше скорости медленного, то между ними образуется слой, ширина которого увеличивается с течением времени при $t > t_1$.

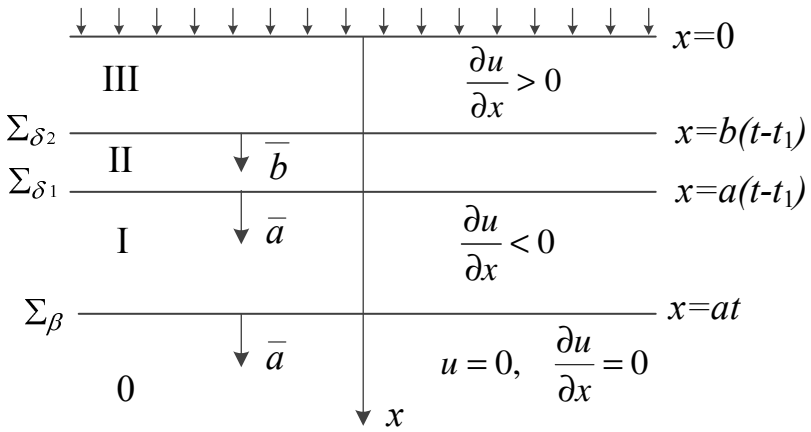


Рис. 24. Волновая картина, соответствующая интервалу времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

Решение (3.20) остается верным только в области $x \geqslant at$ (зона I

на рис. 24). В области $0 \leqslant x \leqslant b(t-t_1)$ (зона III на рис. 24) выполняется уравнение движения (1.31), где $c = b$. В решении д'Аламбера

$$u^{III} = f_3\left(t - t_1 - \frac{x}{b}\right) + g_3\left(t - t_1 + \frac{x}{b}\right) \tag{3.21}$$

неизвестные функции $f_3(\xi(x,t))$ и $g_3(\xi(x,t))$ определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} &u\Big|_{x=0} = \varphi(t - t_1), \\ &[u]\Big|_{x=b(t-t_1)} = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Подставляя (3.21) в граничные условия (3.22), получим систему уравнений, аналогичную (3.5), в результате решения которой можем записать функцию перемещений точек разномодульной упругой среды в зоне III:

$$u^{III} = \varphi\left(t - t_1 - \frac{x}{b}\right). \tag{3.23}$$

Для определения функции перемещений $u(x,t)$ в зоне II запишем условие $\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\Big|_{\Sigma_\delta} = 0$ на простых волнах $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u^I}{\partial x} - \dfrac{\partial u^{II}}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t-t_1)} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u^{II}}{\partial x} - \dfrac{\partial u^{III}}{\partial x}\right)\Big|_{x=b(t-t_1)} = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Подставляя в систему (3.24) решения в зонах I (3.20) и III (3.23), получаем, что $\dfrac{\partial u^{II}}{\partial x} = 0$ и на простом разрыве Σ_{δ_1}, и на Σ_{δ_2}. Следовательно, в области $b(t - t_1) \leqslant x \leqslant a(t - t_1)$ (зона II на рис. 24) перемещения имеют постоянное значение $u^{II} = \varphi(t_1)$.

Окончательно, решение задачи в полученных областях между волновыми фронтами $\Sigma_\beta(t)$, $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и границей полупространства (рис. 25), согласно условиям на полусигнотонах (1.82), простых разрывах (1.83) и заданной граничной функции $\varphi(t)$, при $t \geqslant t_1$ будет иметь

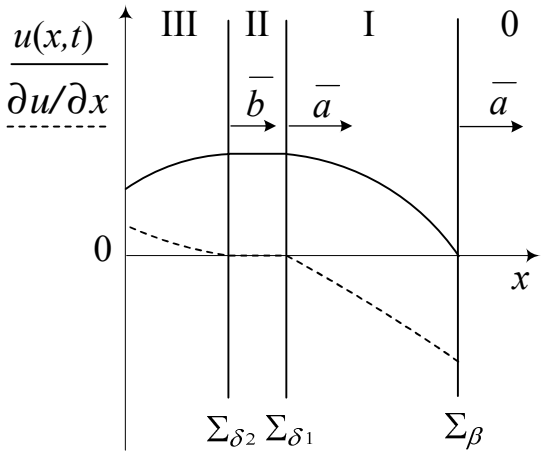


Рис. 25. Решение задачи в интервале времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

вид

$$u(x,t)=\begin{cases} \varphi\left(t-\dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant b(t-t_1), \\ \varphi(t_1)=\text{const} & \text{при } b(t-t_1) \leqslant x \leqslant a(t-t_1), \\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } a(t-t_1) \leqslant x \leqslant at, \\ 0 & \text{при } x \geqslant at. \end{cases} \tag{3.25}$$

Таким образом, в слое между простыми разрывами Σ_{δ_1} и Σ_{δ_2} возникает область постоянных перемещений, в которой точки среды покоятся, так как согласно полученному решению (3.25) скорость перемещений точек среды $v(x,t)=\dot{u}(x,t)=0$ при $b(t-t_1) \leqslant x \leqslant a(t-t_1)$. Слой постоянных перемещений ($\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при $b(t-t_1) \leqslant x \leqslant a(t-t_1)$) является переходным между областью сжатия ($\partial u/\partial x<0$ при $a(t-t_1) \leqslant x \leqslant at$) и областью растяжения ($\dfrac{\partial u}{\partial x}>0$ при $0 \leqslant x \leqslant b(t-t_1)$).

3.3 Отражение плоской одномерной волны от жестко закрепленной границы разномодульного упругого слоя

В рамках модели (1.23) рассмотрим разномодульный упругий слой толщиной H, находящийся в свободном состоянии до момента времени

t_0 . Прямоуольную декартову систему координат, аналогично предыдущим задачам, привяжем к нагружаемой границе слоя $x = 0$. С момента времени $t = 0$ слой подвергается одноосному ударному нагружению таким образом, что точки граничной плоскости $x = 0$ начинают двигаться по закону $u(0,t) = \varphi(t)$: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) \neq 0$ при $t \geqslant 0$. Вторая граница слоя $x = H$ при этом жестко закреплена: $u(H,t) = 0$.

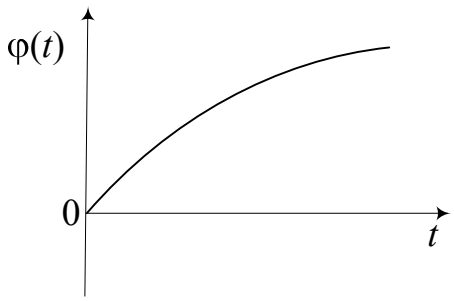


Рис. 26. Функция перемещений границы слоя $x = 0$

Пусть функция $\varphi(t)$ задана положительной монотонно возрастающей (рис. 26), т.е. на границу действует сжимающая нагрузка, тогда с момента времени $t = 0$ в слой от границы $x = 0$ начинает распространяться быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ – волна сжатия со скоростью $c = a$ (рис. 27).

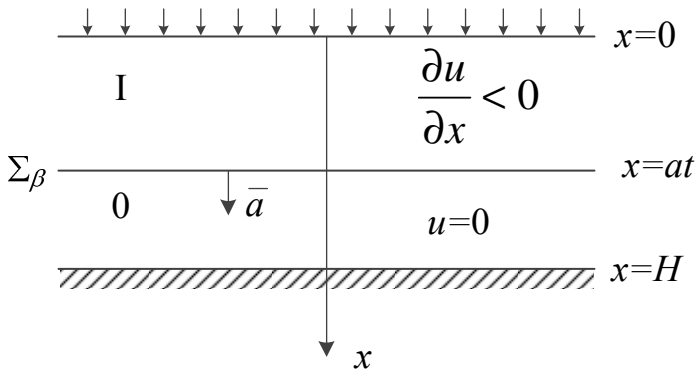


Рис. 27. Волновая картина, возникающая в разномодульном слое с жестко закрепленной границей при $t \leqslant \dfrac{H}{a}$

В области $0 \leqslant x < at$ справедливо уравнение движения (1.31),

где $c = a$. Решение д'Аламбера для него имеет вид (3.18). Согласно условию непрерывности перемещений на полусигнотоне и заданной на границе $x = 0$ функции $\varphi(t)$, можем определить неизвестные функции в решении д'Аламбера $f_1(\xi(x,t))$ и $g_1(\xi(x,t))$. Решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{H}{a}$ строится аналогично предыдущей задаче до момента смены типа нагрузки и имеет вид (рис. 28)

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant at, \\ 0 & \text{при } at \leqslant x \leqslant H. \end{cases} \tag{3.26}$$

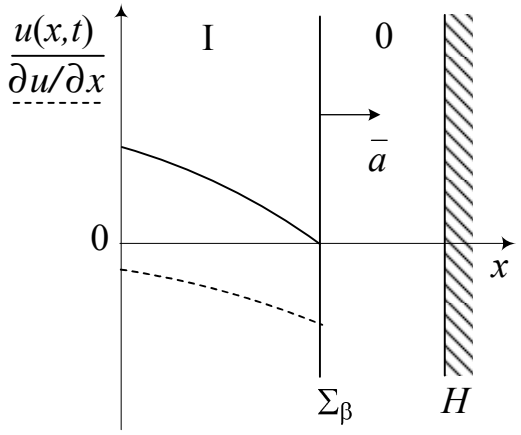


Рис. 28. Решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{H}{a}$

Граничные возмущения достигают посредством полусигнотона $\Sigma_\beta(t)$ закрепленной границы слоя $x = H$ в момент времени $t_1 = \dfrac{H}{a}$ и отражаются от нее в виде волнового фронта $\Sigma(t)$ с координатой $x = H - c(t - t_1)$. Поскольку функция нагружения $\varphi(t)$ монотонно возрастающая, то в области $H - c(t - t_1) \leqslant x < H$ за отраженным волновым фронтом $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ остается отрицательным. Согласно описанной в главе 1 классификации разрывов, от жестко закрепленной границы слоя отражается сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$, который не меняет характер процесса деформирования, т. е. за фронтом отраженной волны $\Sigma_\gamma(t)$ происходит

дальнейшее сжатие среды. Скорость отраженного сигнотона оказывается равной a. В области II (рис. 29) выполняется уравнение движения (1.31), в котором фазовая скорость $c = a$.

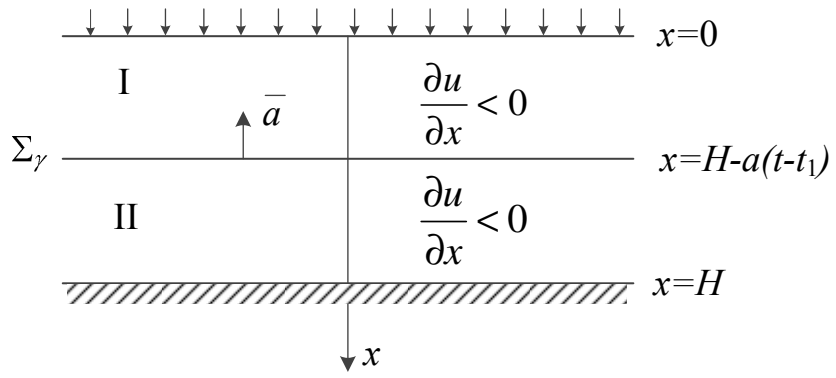


Рис. 29. Волновая картина, возникающая в разномодульном слое с жестко закрепленной границей при $t > \dfrac{H}{a}$

Неизвестные функции $f_2(\xi(x,t))$ и $g_2(\xi(x,t))$ в решении д'Аламбера

$$u^{II} = f_2\left(t - \frac{H}{a} - \frac{x}{a}\right) + g_3\left(t - \frac{H}{a} + \frac{x}{a}\right) \tag{3.27}$$

определим из условия жесткого закрепления границы $u(H,t) = 0$ и условия непрерывности перемещений на сигнотоне, фронт которого $x = H - a(t - t_1) = 2H - at$. Получаем для $f_2(\xi(x,t))$ и $g_2(\xi(x,t))$ следующую систему уравнений

$$\begin{cases} f_2\left(t - \dfrac{2H}{a}\right) + g_2(t) = 0, \\ \varphi\left(2t - \dfrac{2H}{a}\right) - f_2\left(2t - \dfrac{3H}{a}\right) - g_2\left(\dfrac{H}{a}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.28}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} f_2(\xi) = \varphi\left(\xi + \dfrac{H}{a}\right), \\ g_2(\xi) = \varphi\left(\xi - \dfrac{H}{a}\right), \end{cases} \tag{3.29}$$

где ξ – любое.

Подставляя выражения (3.29) для функций $f_2(\xi(x,t))$ и $g_2(\xi(x,t))$ в (3.27), получим решение задачи при $t > \dfrac{H}{a}$ (рис. 30):

$$u(x,t)=\begin{cases} \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right)-\varphi\left(t-2\dfrac{H}{a}+\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 2H-at \leqslant x \leqslant H, \\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2H-at. \end{cases} \tag{3.30}$$

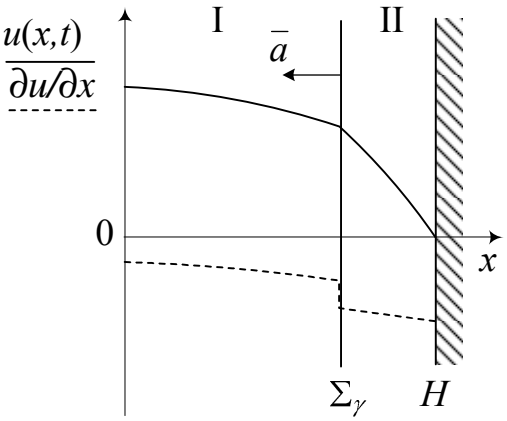


Рис. 30. Решение задачи при $t > H/a$

Изменим постановку задачи следующим образом. Пусть теперь на границу слоя с момента времени $t = 0$ действует растягивающая нагрузка так, что точки граничной плоскости $x = 0$ движутся по закону, определяемому отрицательной монотонно убывающей функцией $\varphi(t)$ (рис. 31).

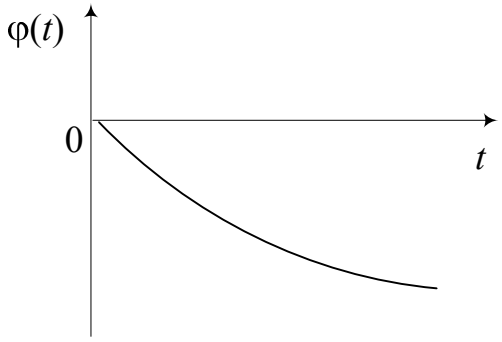


Рис. 31. Функция перемещений на границе слоя $x = 0$

В этом случае качественный характер решения задачи сохраняется. Разница в том, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ в слой распространяется теперь

волна разрежения $\Sigma_\beta(t)$. Слой подвергается растяжению посредством медленного полусигнотона со скоростью b, т.к. $\partial u/\partial x > 0$ в области I (рис. 32, a). После отражения граничных возмущений от жестко закрепленной границы $x = H$ при $t > H/b$ по слою движется сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$ (рис. 32, b).

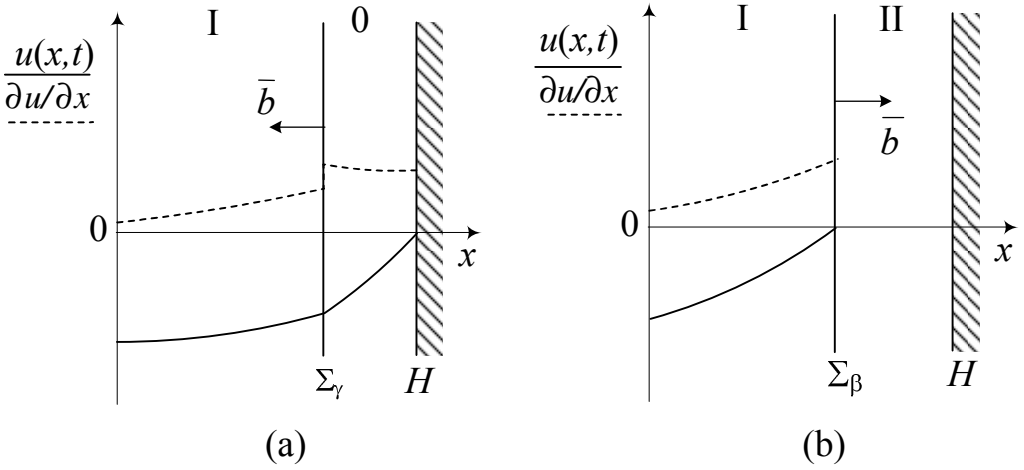


Рис. 32. Отражение волны разрежения от жестко закрепленной границы слоя: (a) – решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant H/b$; (b) – решение задачи при $t > H/b$

Фазовая скорость уравнения движения, как и в предыдущем случае, при распространении сигнотона по предварительно растянутой области слоя не изменяется и равна b. Решение задачи, полученное аналогично предыдущей постановке, имеет следующий вид:

при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{H}{b}$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant bt, \\ 0 & \text{при } bt \leqslant x \leqslant H; \end{cases}$$

при $t > \dfrac{H}{b}$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) - \varphi\left(t - 2\dfrac{H}{b} + \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 2H - bt \leqslant x \leqslant H, \\ \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2H - bt. \end{cases}$$

Таким образом, выбор направления воздействия на нагружаемую границу $x = 0$ (сжатие или растяжение) не влияет на качественный характер решения данной задачи: от жестко закрепленной границы слоя $x = H$ всегда отражается один волновой фронт – сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$. Вид функции нагружения влияет только на скорость распространяющегося по слою сигнотона – быстрый со скоростью a или медленный со скоростью b.

3.4 Отражение плоской одномерной волны сжатия от свободной границы разномодульного упругого слоя

Вывод, полученный в § 3.3, перестает быть верным, если отказаться от условия жесткого закрепления границы разномодульного упругого слоя $u(H, t) = 0$, считая теперь эту границу свободной.

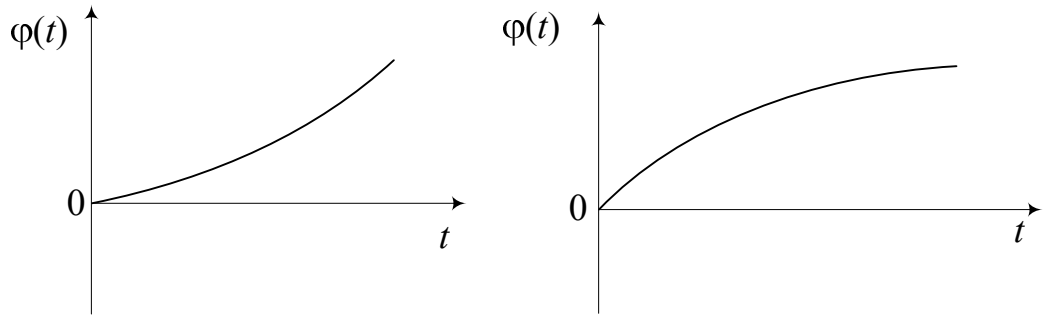
В разномодульной упругой среде рассмотрим слой, у которого на граничную плоскость $x = 0$ с момента времени $t = 0$ начинает действовать сжимающая нагрузка, а вторая граница $x = H$ остается свободной на протяжении всего процесса деформирования. Условие отсутствия внешней нагрузки на граничной плоскости $x = H$ запишем в виде:

$$\sigma\Big|_{x=H} = 0. \tag{3.31}$$

Поскольку напряжение σ вычисляется из соотношения (1.30), то условие (3.31) сводится к требованию

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=H} = 0. \tag{3.32}$$

Пусть на граничную плоскость $x = 0$ действует сжимающая нагрузка таким образом, что перемещения точек граничной плоскости

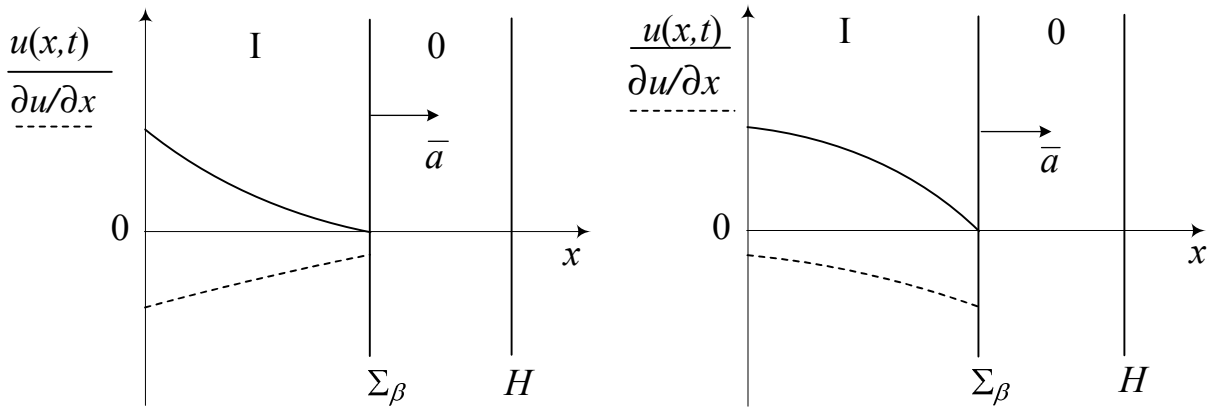


(a) (b)

Рис. 33. Функция перемещений на границе слоя $x = 0$: (a) – вогнутая функция $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$), (b) – выпуклая функция $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

при $t \geqslant 0$ оказываются заданными положительной монотонно возрастающей выпуклой или вогнутой функцией $u(0,t) = \varphi(t)$: $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ (рис. 33). Тогда начиная с момента времени $t = 0$ граничные возмущения распространяются в слой посредством быстрого полусигнотона $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a и координатой фронта $x = at$.

Среда за полусигнотоном оказывается сжатой. Решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{H}{a}$ строится аналогично задаче с жестко закрепленной границей до момента столкновения с ней и имеет вид (3.20) (рис. 34).



(a) (b)

Рис. 34. Решение задачи до момента времени $t = t_1 = \dfrac{H}{a}$: (a) – при вогнутой положительной функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$), (b) – при выпуклой положительной функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

В момент времени $t = t_1 = \dfrac{H}{a}$ полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ достигает свободной границы слоя $x = H$. Для дальнейшего решения введем новые переменные $y = H - x$, $\theta = t - t_1$. В переменных y, θ уравнение движения (1.10) так же сведется к уравнению (1.31). Сделав переход к новым переменным, запишем перемещения в области I (рис. 35, а):

$$u(y,\theta) = \varphi\left(\theta + \frac{y}{a}\right). \tag{3.33}$$

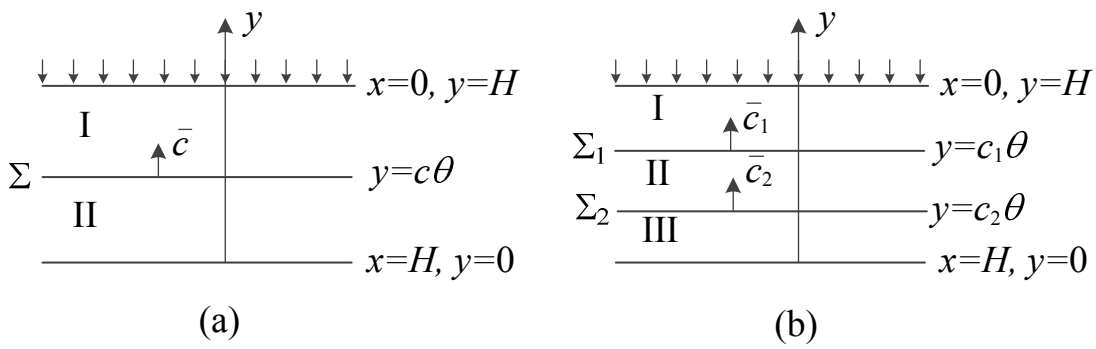


Рис. 35. Волновая картина при $t > t_1 = \dfrac{H}{a}$: (a) – при вогнутой функции $\varphi(t)$; (b) – при выпуклой функции $\varphi(t)$

В области I (рис. 35, а) $\dfrac{\partial u}{\partial y} > 0$. В этом случае, согласно введенной классификации разрывов, от свободной границы слоя может отразиться либо одна волна – сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$ со скоростью a (рис. 36, а), либо два полусигнотона – быстрый $\Sigma_{\beta_1}(t)$ и медленный $\Sigma_{\beta_2}(t)$. Выбор первого или второго варианта, как оказалось, определяется знаком второй производной заданной функции $\varphi(t)$.

Рассмотрим случай, когда от свободной границы отражается быстрый сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$, за которым продолжается дальнейшее сжатие среды. В области II при $a\theta \leqslant y \leqslant 0$ выполняется уравнение движения (1.31), в котором фазовая скорость $c = a$. Его решение представим в форме д'Аламбера в новых переменных y, θ:

$$u^{II} = f_2\left(\theta - \frac{y}{a}\right) + g_2\left(\theta + \frac{y}{a}\right). \tag{3.34}$$

Неизвестные функции в решении д'Аламбера (3.34) определим из краевых условий задачи:

–непрерывности перемещений на поверхности $\Sigma(t)$ (рис. 35, а)

$$[u]\Big|_{y=a\theta} = 0, \tag{3.35}$$

–условия (3.31) отсутствия внешней нагрузки на плоскости $y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = 0. \tag{3.36}$$

Таким образом получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi(2\theta) - f_2(0) - g_2(2\theta) = 0, \\ f_2'(\theta) = g_2'(\theta), \end{cases} \tag{3.37}$$

решение которой имеет вид: $f_2(\theta) = g_2(\theta) = \varphi(\theta)$. Подставляя полученные значения для функций f_2 и g_2 в соотношение (3.34), можем записать решение задачи при $t > \dfrac{H}{a}$ в переменных y, θ:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(\theta - \dfrac{y}{a}\right) + \varphi\left(\theta + \dfrac{y}{a}\right) & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant a\theta, \\ \varphi\left(\theta + \dfrac{y}{a}\right) & \text{при } a\theta \leqslant y \leqslant H. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным x и t, окончательно запишем

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \varphi\left(t - 2\dfrac{H}{a} + \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 2H - at \leqslant x \leqslant H, \\ \varphi\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2H - at. \end{cases} \tag{3.38}$$

При проверке решения (3.38) на выполнение неравенства $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$ в области II было получено неравенство $\varphi'\left(t - 2t_1 + \dfrac{x}{a}\right) < \varphi'\left(t - \dfrac{x}{a}\right)$, выполнение которого возможно только в случае вогнутой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$) (рис. 33, а).

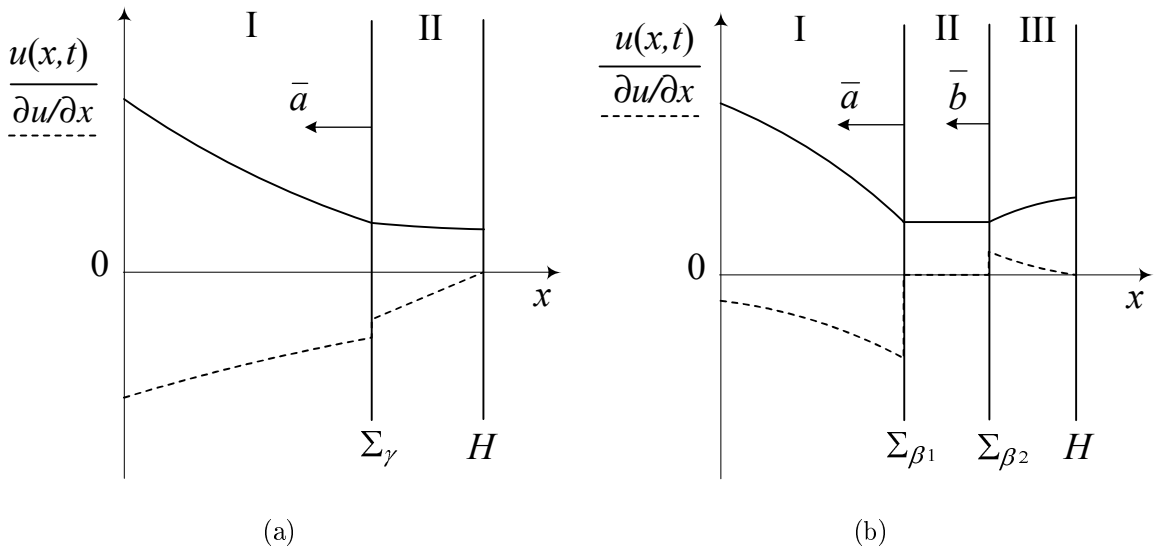


Рис. 36. Отражение волны сжатия от свободной границы слоя: (a) – решение задачи при вогнутой положительной функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$), (b) – решение задачи при выпуклой положительной функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$)

Рассмотрим второй возможный случай, когда в результате столкновения волны сжатия со свободной границей обратно в слой отражаются два полусигнотона: быстрый $\Sigma_{\beta_1}(t)$ со скоростью a и координатой фронта $y = a\theta$ возвращает ранее деформированный слой в свободное состояние, а медленный $\Sigma_{\beta_2}(t)$ со скоростью b и координатой фронта $y = b\theta$ является волной разрежения.

В области I (рис. 35, b) $\dfrac{\partial u}{\partial y} > 0$, а в области III – $\dfrac{\partial u}{\partial y} < 0$. Поскольку в области II $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ и однозначно сказать, какова скорость распространения точек среды в ней, то в решении уравнения движения (1.31) в форме д'Аламбера (1.33) оставим скорость c пока неизвестной. Соответствующая такой волновой картине система функциональных уравнений, составленная из условий (1.82), (3.36) с учетом (3.33),

(3.34), будет иметь вид

$$\begin{cases} f_2\left(\theta\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\right)+g_2\left(\theta\left(1+\dfrac{a}{c}\right)\right)=\varphi(\theta), \\ f_2\left(\theta\left(1-\dfrac{b}{c}\right)\right)+g_2\left(\theta\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\right)=f_3(\theta), \\ f_3'(\theta)=g_3'(\theta), \\ (c^2-a^2)\left(f_2'\left(\theta\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\right)-g_2'\left(\theta\left(1+\dfrac{a}{c}\right)\right)\right)=0, \\ (c^2-b^2)\left(f_2'\left(\theta\left(1-\dfrac{b}{c}\right)\right)-g_2'\left(\theta\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\right)\right)=0. \end{cases} \tag{3.39}$$

В результате решения системы (3.39) получим, что $u^{II}=g_2(2\theta)=\varphi(2\theta)$, а $f_2(\xi)=0$ и $f_3(\xi)=g_3(\xi)=\varphi(\xi)$ для любого аргумента ξ. Тогда решение задачи при $t>\dfrac{H}{a}$ в переменных y и θ выражается соотношениями

$$u(y,\theta)=\begin{cases} \varphi\left(\theta-\dfrac{y}{b}\right)+\varphi\left(\theta+\dfrac{y}{b}\right) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant b\theta, \\ \varphi\left(2\theta\right) & \text{при } b\theta\leqslant y\leqslant a\theta, \\ \varphi\left(\theta+\dfrac{y}{a}\right) & \text{при } a\theta\leqslant y\leqslant H. \end{cases}$$

Таким образом, упругий слой оказывается поделенным двумя отраженными волновыми фронтами на три области (рис. 36, b). В зоне $a\theta\leqslant y\leqslant H$ продолжается сжатие среды под действием приложенной на границу $y=H$ нагрузки. Область $0\leqslant y\leqslant b\theta$ подвергается растяжению, в ней $\dfrac{\partial u}{\partial y}<0$ и фазовая скорость уравнения движения (1.31) равна b. Зона $b\theta\leqslant y\leqslant a\theta$ между фронтами $\Sigma_{\beta_1}(t)$ и $\Sigma_{\beta_2}(t)$ оказывается областью постоянных перемещений, в которой среда недеформирована и движется как жесткое целое, так как скорость перемещений точек среды в этой зоне, согласно полученному решению, не зависит от пространственной координаты y.

Возвращаясь к переменным x и t, решение задачи примет вид:

$$u(x,t)=\begin{cases} \varphi\left(t-\dfrac{H}{a}+\dfrac{H}{b}-\dfrac{x}{b}\right)+\varphi\left(t-\dfrac{H}{a}-\dfrac{H}{b}+\dfrac{x}{b}\right) \\ \qquad\qquad \text{при } \left(1+\dfrac{b}{a}\right)H-bt\leqslant x\leqslant H, \\ \varphi\left(2\left(t-\dfrac{H}{a}\right)\right) \text{ при } 2H-at\leqslant x\leqslant\left(1+\dfrac{b}{a}\right)H-bt, \\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right) \qquad \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2H-at. \end{cases} \tag{3.40}$$

Выполняя проверку решения (3.40) на выполнение неравенства $\dfrac{\partial u}{\partial x}>0$ в области III и условия $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ в области II, оказалось,что такая волновая картина (рис. 35, b) возможна только в случае выпуклой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t)<0$) (рис. 33, b).

Таким образом, чтобы определить характер отраженной волновой картины в слое со свободной границей, а именно, сколько волновых фронтов отражается и какие они, оказалось необходимым учитывать знак второй производной $\varphi''(t)$ заданной на границе $x=0$ функции перемещений.

3.5 Отражение плоской одномерной волны разрежения от свободной границы разномодульного упругого слоя

Рассмотрим случай, когда начиная с момента времени $t=0$ на одну из границ разномодульного упругого слоя толщины H действует одноосная растягивающая нагрузка, а вторая граница остается свободной. Такая постановка при $t\geqslant 0$ имеет место, если перемещения точек граничной плоскости $x=0$ заданы отрицательной монотонно убывающей выпуклой или вогнутой функцией $u(0,t)=\varphi(t)$: $\varphi(0)=0$, $\varphi'(t)<0$ (рис. 37).

Условие отсутствия нагрузки на границе $x=H$ задано соотно-

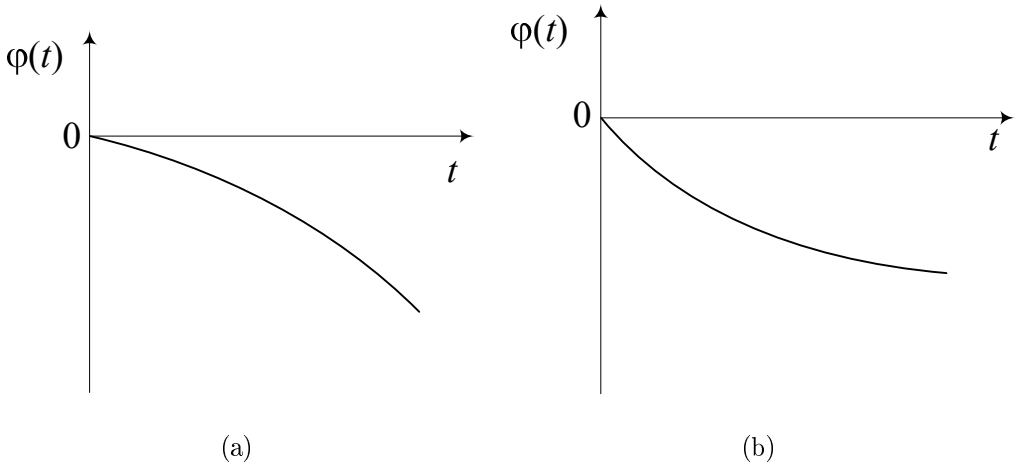


Рис. 37. Функция перемещений на границе слоя $x = 0$: (a) – выпуклая функция $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$), (b) – вогнутая функция $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

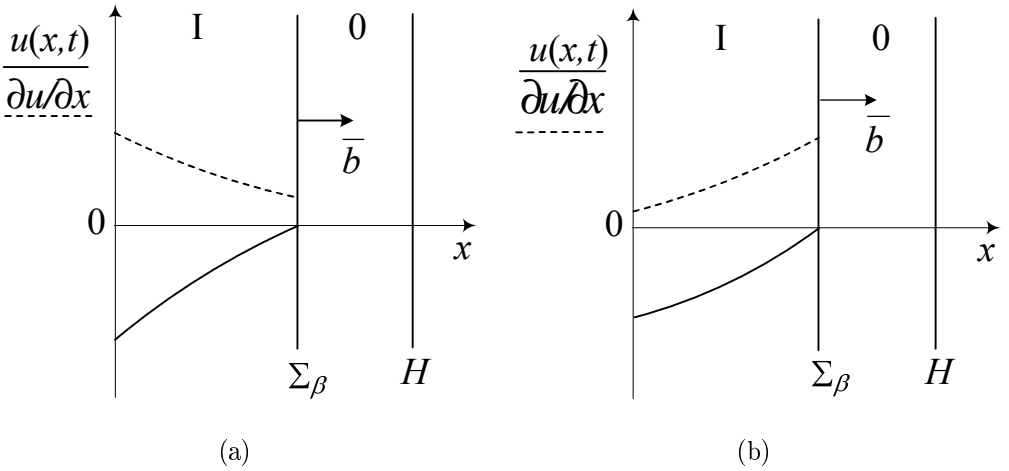


Рис. 38. Решение задачи: (a) – при выпуклой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$), (b) – при вогнутой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

шением (3.31).

Тогда с момента времени $t = 0$ деформации в слой распространяются посредством медленного полусигнотона $\Sigma_\beta(t)$ – волны разрежения со скоростью b (рис. 38). В области $0 \leqslant x \leqslant bt$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$, и среда за фронтом $\Sigma_\beta(t)$ подвергается разрежению. Решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant bt$ описывается соотношениями (3.31) (рис. 38).

Решение при $t > \dfrac{H}{b}$, также как и в задаче о действии сжимающей нагрузки на границу слоя, зависит от знака второй производной $\varphi''(t)$

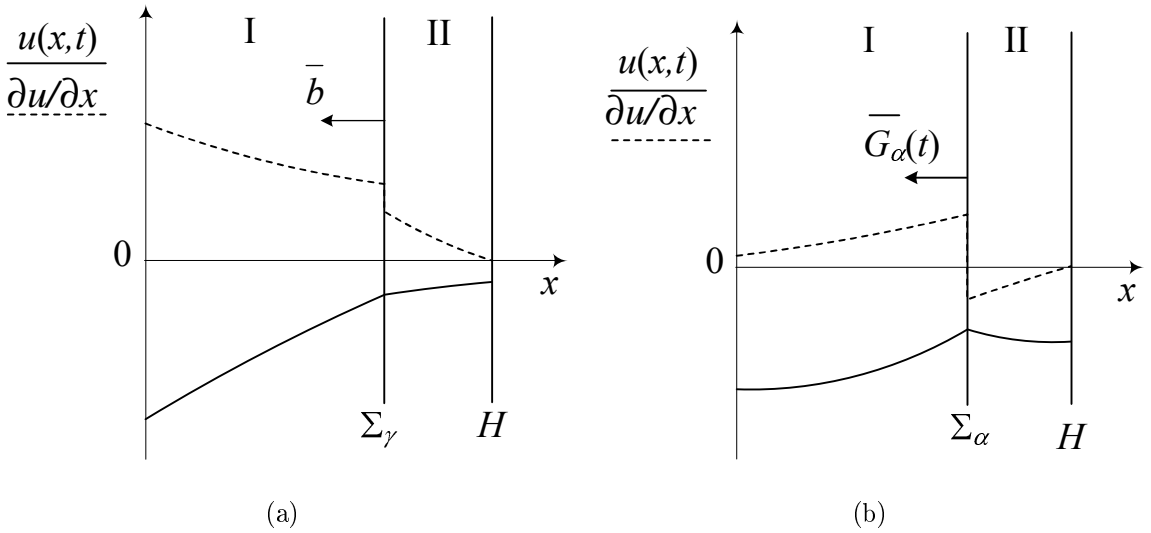


Рис. 39. Решение задачи $t > \dfrac{H}{b}$: (a) – при выпуклой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) < 0$), (b) – при вогнутой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t) > 0$)

заданной на границе $x = 0$ функции перемещений. Согласно классификации разрывов из § 1.5 от свободной границы возможно отражение либо сигнотона, либо ударной волны.

Рассмотрим случай, когда от свободной границы разномодульного слоя отражается медленный сигнотон $\Sigma_\gamma(t)$ со скоростью b (рис. 39, a), за которым среда подвергается дальнейшему разрежению. Для дальнейшего решения перейдем к тем же переменным y , θ , только $t_1 = \dfrac{H}{b}$. Функциональная система уравнений с целью определения неизвестных функций в решении уравнения движения (1.31) в форме д'Аламбера (1.33) состоит из условия непрерывности перемещений на сигнотоне и условия (3.36). Учитывая (3.6), получим систему (3.37), решение которой позволяет записать перемещения точек среды при $t > \dfrac{H}{b}$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) + \varphi\left(t - 2\dfrac{H}{b} + \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 2H - bt \leqslant x \leqslant H, \\ \varphi\left(t - \dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2H - bt. \end{cases} \tag{3.41}$$

Проверка решения (3.41) на выполнение неравенства $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$ в об-

ласти II, как и в предыдущей задаче о действии сжимающей нагрузки на границу слоя, показала, что выполнение неравенства возможно только в случае отрицательной выпуклой функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t)<0$) (рис. 37, a).

Если же заданная на границе $x = 0$ функция $\varphi(t)$ – отрицательная вогнутая (рис. 37, b), ($\varphi''(t) > 0$), то при таком воздействии на разномодульный упругий слой полученное ранее поле перемещений (3.41) не является решением, т.к. не выполняется в области II условие $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$. Таким образом, в области II фазовая скорость уравнения движения a . В этом случае, согласно введенной классификации разрывов в § 1.5 от свободной границы $x = H$ отражается ударная волна $\Sigma_\alpha(t)$ (рис. 39, b). Очевидно, что в момент отражения $t = \dfrac{H}{b}$ скорость ударной волны $G_\alpha(t)$ равна b , а в последующие моменты времени начинает увеличиваться, стремясь достигнуть значения a . Появление такого эффекта объясняется тем, что ударная волна движется из сжатой области слоя в растянутую, и перед фронтом $\Sigma_\alpha(t)$ фазовая скорость уравнения движения меньше, чем за ним ($b < a$). Фронт ударной волны $\Sigma_\alpha(t)$ будет иметь координату $x = H - \int\limits_{H/b}^{t} G(\xi)d\xi$. Для дальнейшего исследования распространения ударной волны в разномодульном упругом слое перейдем к переменным y и θ . Фронт ударной волны в новых переменных соответствует координате $y = \int\limits_{0}^{\theta} G(\xi)d\xi$. Решение уравнения движения (1.31) в данной задаче представим в форме д'Аламбера

$$u^{II} = f_2\left(\theta - \frac{y}{b}\right) + g_2\left(\theta + \frac{y}{b}\right). \tag{3.42}$$

Граничными условиями задачи являются условия (3.35) непрерывности перемещений на поверхности разрыва и условие отсутствия внешней нагрузки на плоскости $y = 0$ (3.36). Подставляя в них реше-

ние д'Аламбера (3.42), имеем

$$\begin{cases} f_2'(\theta) - g_2'(\theta) = 0, \\ f\left(\theta - \dfrac{y}{a}\right)\Big|_{y=y_1} + g\left(\theta + \dfrac{y}{a}\right)\Big|_{y=y_1} = \varphi\left(\theta + \dfrac{y}{b}\right)\Big|_{y=y_1}, \\ y_1 = \int\limits_0^\theta G(\xi)d\xi. \end{cases} \tag{3.43}$$

Функциональные зависимости (3.43) не позволяют найти все неизвестные функции. Дополнительным условием для определения f, g и G является динамическое условие совместности разрывов (1.77) на Σ с координатой фронта $y = \int\limits_0^\theta G(\xi)d\xi$, из которого следует:

$$(a^2 + b^2 - 2G^2)\left(\frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial u^{II}}{\partial y}\right) - (a^2 - b^2)\left(\frac{\partial u^I}{\partial y} + \frac{\partial u^{II}}{\partial y}\right) = 0.$$

Подставляя в полученное равенство u^I из (3.31) и u^{II} из (3.42), получаем недостающее уравнение

$$a\left(G^2 - b^2\right)\varphi'\left(\theta + \frac{y}{b}\right)\Big|_{y=y_1} = \\ = b\left(G^2 - a^2\right)\left(f'\left(\theta - \frac{y}{a}\right) + f'\left(\theta + \frac{y}{a}\right)\right)\Big|_{y=y_1}. \tag{3.44}$$

Функциональные зависимости (3.43) и (3.44) решают задачу. Один из способов определить вид функций G и f – разложить их в ряды Тейлора при $t_0 = 0$. Неизвестные коэффициенты в рядах при t в различных степенях определяются из уравнений (3.43) и (3.44), если взять первую, вторую и далее производные от входящих в эти уравнения функций при $t_0 = 0$.

Таким образом, скорость движения ударной волны оказывается зависимой от времени:

$$G_\alpha(t) = b + F(a, b, \varphi(t), \varphi'(t))\big|_{t=H/b} \cdot t + ..., \tag{3.45}$$

где $F(a,b,\varphi(t),\varphi'(t)) \geqslant 0$ – положительная функция.

Следовательно, распределение поля перемещений при $t > \dfrac{H}{b}$ (рис. 39, c) в случае вогнутой отрицательной функции $\varphi(t)$ можно записать в виде

$$u(x,t)=\begin{cases} \Phi(x,t,G_\alpha(t)) & \text{при } H-\int_{H/b}^{t} G(\xi)d\xi \leqslant x \leqslant H, \\ \varphi\left(t-\dfrac{x}{b}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant H-\int\limits_{H/b}^{t} G(\xi)d\xi, \end{cases}$$

где функция $\Phi(x,t,G_\alpha(t))$ такова, что при $H-\int\limits_{H/b}^{t} G(\xi)d\xi \leqslant x \leqslant H$ $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$.

Описанные выше результаты демонстрируют возможность возникновения нелинейных эффектов (ударных волн, областей постоянных перемещений) при описании динамического деформирования среды в рамках линейного приближения определяющих соотношений модели разномодульной упругой среды.

3.6 Одномерные задачи об ударном сдвиге на границе полупространства в несжимаемой разномодульной среде

Было проведено решение аналогичных задач в несжимаемой разномодульной среде, когда на границу полупространства действует сдвиговая нагрузка, приложенная в различных направлениях [40]. В связи с тем, что математический аппарат решения уравнения движения в несжимаемой разномодульной на сдвиг среде и в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию, а также классификация разрывов уравнения движения совпадают, поэтому приведем только постановку и окончательные решения задач об ударном сдвиге на границе

полупространства в несжимаемой разномодульной среде.

3.6.1 Одномерное сдвиговое ударное деформирование разномодульного упругого полупространства. Возникновение недеформированной области

В рамках модели (1.40) рассмотрим разномодульное недеформированное упругое полупространство, на границу которого начинает действовать равномерная сдвиговая нагрузка. Решение проведем в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, в которой плоскость Ox_2x_3 ($x_1 = 0$) совпадает с границей полупространства. Действующая на границу $x_1 = 0$ упругого разномодульного недеформированного полупространства $x \geqslant 0$ с момента времени $t = 0$ вдоль оси x_2 равномерная сдвиговая нагрузка приводит точки граничной плоскости к движению по закону $u_2(0,t) = u(0,t) = \varphi(t)$. Функцию $\varphi(t)$ зададим гладкой, дважды непрерывно дифференцируемой; $\varphi(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_2$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < t_1$; $\varphi'(t_1) = 0$; $\varphi'(t) < 0$ при $t_1 < t \leqslant t_2$ (рис. 40, а). Таким образом, на полупространство сначала действует равномерная нагрузка, сдвигающая точки границы в положительном направлении оси Ox_2, а затем с момента времени t_1 прикладывается противоположное по знаку нагружение.

В результате заданного воздействия на границу полупространства $x = 0$, в момент времени $t = 0$ от нее отделяется быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью A. Перед его фронтом $x_1 = At$ среда недеформирована. В области $0 \leqslant x_1 < At$ скорость распространения сдвиговых возмущений во втором уравнении движения (1.43) принимает значение $c_2 = A$.

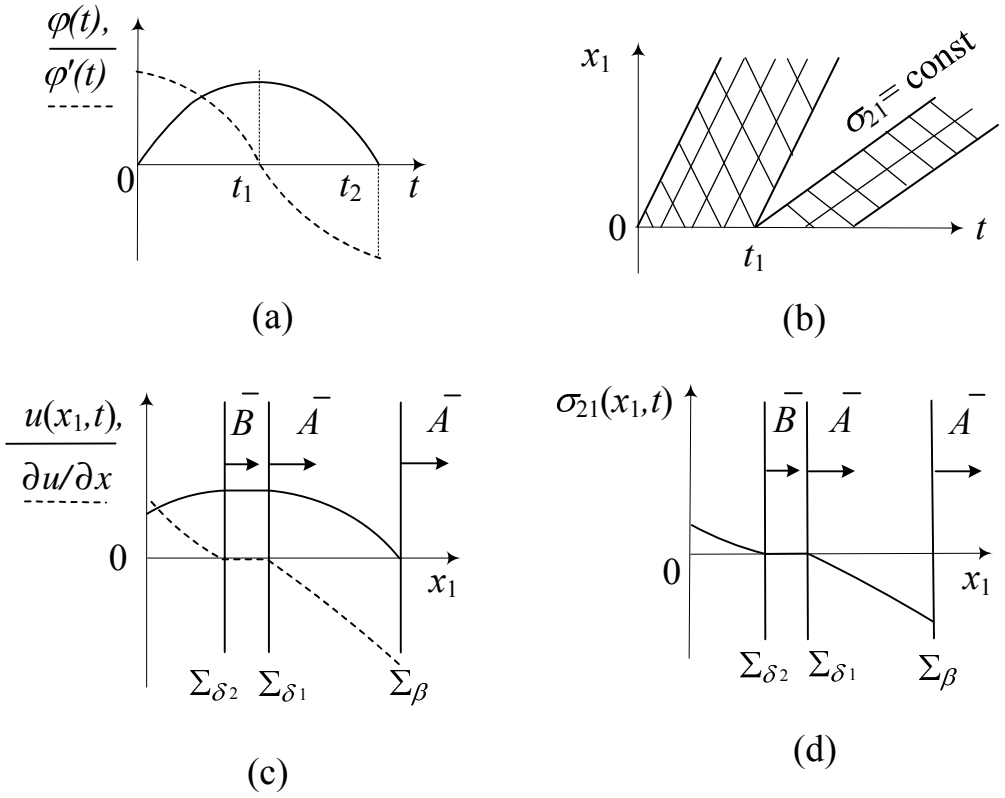


Рис. 40. Возникновение недеформированной области: (a) – функция перемещений на границе полупространства; (b) – характеристики уравнения движения; (c), (d) – решение задачи при $t \geqslant t_1$

Исходя из условия непрерывности перемещений на полусигнотоне и заданной граничной функции перемещений $\varphi(t)$, решение (1.33) в диапазоне времени $0 \leqslant t < t_1$ в этом случае имеет вид

$$u(x_1,t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x_1}{A}\right) & \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant At, \\ 0 & \text{при } x_1 \geqslant At. \end{cases} \tag{3.46}$$

В момент времени $t = t_1$ на границе $x_1 = 0$ возникают два простых разрыва (рис. 40, b, c): быстрый $\Sigma_{\delta_1}(t)$ со скоростью A и координатой фронта $x_1 = A(t - t_1)$ и медленный $\Sigma_{\delta_2}(t)$ со скоростью B и координатой фронта $x_1 = B(t - t_1)$. Поскольку скорость быстрого сигнотона больше скорости медленного (в работе принято $A > B$), то между ними образуется слой, ширина которого увеличивается с тече-

нием времени при $t > t_1$. Решение задачи (рис. 40, c, d) в полученных областях между волновыми фронтами и границей полупространства, учитывая условия на простых разрывах (1.83) и заданную граничную функции $\varphi(t)$, при $t \geqslant t_1$ будет иметь вид

$$u(x_1,t)=\begin{cases} \varphi\left(t-\dfrac{x_1}{B}\right) & \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant B(t-t_1), \\ \varphi(t_1)=\text{const} & \text{при } B(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant A(t-t_1), \\ \varphi\left(t-\dfrac{x_1}{A}\right) & \text{при } A(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant At, \\ 0 & \text{при } x_1 \geqslant At. \end{cases} \tag{3.47}$$

Согласно полученному решению, все компоненты скорости перемещений точек среды в слое $B(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant A(t-t_1)$ равны нулю. Следовательно, между простыми разрывами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ возникает недеформированная область среды, движущаяся как жесткое целое. Слой постоянных перемещений ($\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=0$ при $B(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant A(t-t_1)$) является переходным между областью $A(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant At$ с отрицательным значением $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ и областью $0 \leqslant x_1 \leqslant B(t-t_1)$, где $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ положительное.

3.6.2 Возникновение ударной волны при одномерном сдвиговом ударном деформировании разномодульного упругого полупространства

Пусть теперь закон движения точек границы полупространства задан гладкой, дважды непрерывно дифференцируемой функцией $u_2(0,t)=u(0,t)=\varphi(t)$ такой, что $\varphi(t) \leqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_2$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(t) < 0$ при $0 \leqslant t < t_1$, $\varphi'(t_1)=0$, $\varphi'(t) > 0$ при $t > t_1$ (рис. 41, a). Таким образом, на границу полупространства сначала действует равномерная сдвигающая нагрузка в отрицательном направлении оси

Ox_2, а затем с момента времени $t = t_1$ – сдвиг в противоположном направлении.

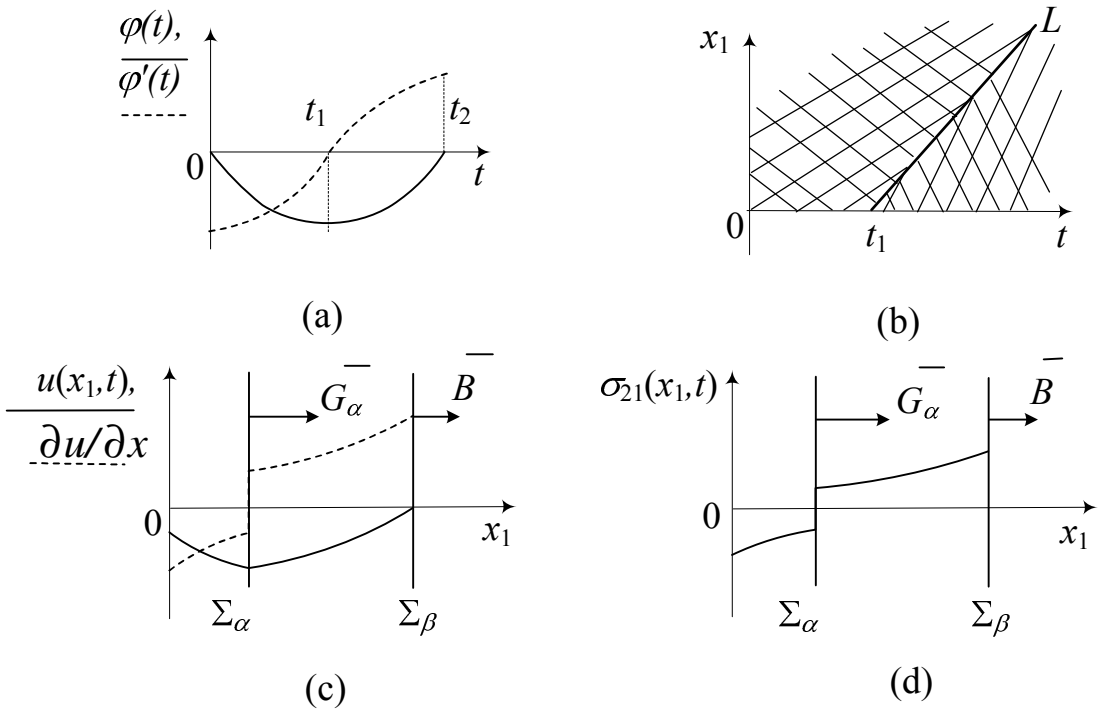


Рис. 41. Возникновение ударной волны: (a) – функция перемещений на границе полупространства; (b) – характеристики уравнения движения; (c), (d) – решение задачи при $t \geqslant t_1$

В этом случае в момент времени $t = 0$ от границы полупространства отделяется медленный полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью B. Перед фронтом полусигнотона $x_1 = Bt$ среда недеформирована. Решение задачи до момента времени $0 \leqslant t < t_1$ будем искать в виде (1.33), в качестве краевых условий используя условие непрерывности перемещений на фронте $x_1 = Bt$ и заданную функцию $\varphi(t)$ на границе $x_1 = 0$:

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \dfrac{x_1}{B}\right) & \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant Bt, \\ 0 & \text{при } x_1 \geqslant Bt. \end{cases} \tag{3.48}$$

С момента времени $t = t_1$ на границе полупространства сдвиговое воздействие меняет свое направление на противоположное ($\varphi'(t) \geqslant 0$

при $t \geqslant t_1$), вследствие чего возникает ударная волна $\Sigma_\alpha(t)$ с фронтом $x_1 = \int\limits_{t_1}^{t} G_\alpha(\xi)d\xi$ при $t \geqslant t_1$ (линия L в характеристической плоскости Ox_1t, рис. 41, b), которая движется вслед за полусигнотоном $\Sigma_\beta(t)$. На ударной волне $\Sigma_\alpha(t)$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ скачком меняет значение с положительного на отрицательное (рис. 41, c, d). Решение задачи при $t \geqslant t_1$ имеет вид

$$u(x_1,t)=\begin{cases} \varphi(t_1)+\varphi''(t_1)\left\{M_1(G_\alpha)(t-t_1-\dfrac{x_1}{A})^2-M_2(G_\alpha)(t-t_1+\dfrac{x_1}{A})^2\right\} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant G_\alpha(t-t_1), \\ \varphi\left(t-\dfrac{x_1}{B}\right) \quad \text{при } G_\alpha(t-t_1) \leqslant x_1 \leqslant At. \\ 0 \qquad\qquad \text{при } x_1 \geqslant Bt, \end{cases} \tag{3.49}$$

где

$$M_1(G_\alpha) = \frac{(A+B)(2AB-(A-B)G_\alpha)}{8AB^2},$$
$$M_2(G_\alpha) = \frac{(A-B)(2AB-(A+B)G_\alpha)}{4AB^2}.$$

В общем случае скорость ударной волны $G_\alpha(t)$ зависит от времени, т.е. линия L (рис. 41, b) не является прямой. Однако, если закон движения точек границы полупространства $\varphi(t)$ задан в виде квадратичной функции, то скорость движения ударной волны оказывается постоянной и зависит только от A и B:

$$G_\alpha = \sqrt[3]{\frac{A^2}{9}}\frac{\sqrt[3]{\left(9B+\sqrt{3}\sqrt{27B^2+A^2}\right)^2}-\sqrt[3]{3A^2}}{\sqrt[3]{9B+\sqrt{3}\sqrt{27B^2+A^2}}}, \quad B < G_\alpha < A.$$

В этом случае фронт ударной волны L (рис. 41, b) – прямая линия.

Полученные решения показывают, что моделирование разномодульных сдвиговых свойств несжимаемой упругой среды кусочно-линейной зависимостью между напряжениями и деформациями приводит к результатам, существенно отличным как от полученных в рамках линей-

ной теории, так и от решений нелинейных моделей с гладкими функциями $\sigma(e)$. С одной стороны, при деформировании несжимаемой упругой среды, обладающей свойством сдвиговой разномодульности в форме (1.40), возникают нелинейные эффекты (ударные волны, простые разрывы, недеформированные слои), которые невозможны в рамках линейной теории. С другой стороны, скорость ударной волны в некоторых случаях может оказаться постоянной и не зависящей от времени, в то время как в нелинейных теориях скорости поверхностей сильных разрывов зависят не только от времени, но и от деформированного состояния перед волной и интенсивности разрыва.

4. Возникновение сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию

Решение нестационарных краевых задач в рамках модели (1.35) для случая одномерных сферических волн ($u_r = u(r,t)$, $u_\varphi = u_\theta = 0$) показывает, что учет кривизны фронтов возмущений вносит дополнительные качественные особенности в характер возникающих волновых картин. Продемонстрируем это на примере решения краевых задач о возникновении одномерных волн при деформировании разномодульной упругой сферы [43].

4.1 Возникновение сферического слоя постоянной плотности

Рассмотрим задачу, когда границей L , на которую действует нагрузка, будет являться поверхность сферы радиуса R . Считаем этот радиус достаточно большим, чтобы в пределах времени нагружения не рассматривать эффекты, которые могут возникнуть при достижении граничными возмущениями центра сферы $r = 0$. Для задания граничной нагрузки по типу «сжатие-растяжение» функцию перемещений $u_r(0,t) = \varphi(t)$ на границе L необходимо положить отрицательной: $\varphi(t) \leqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_2$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ при $0 \leqslant t < t_1$, $\varphi'(t_1) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $t > t_1$ (рис. 42). Распространение граничных возмущений будет происходить в сторону уменьшения значений радиуса r .

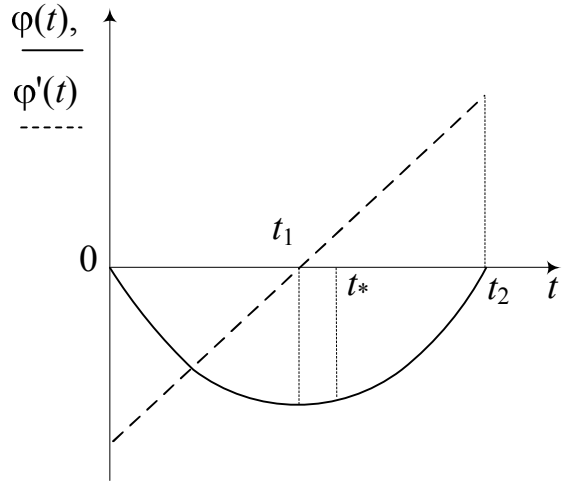


Рис. 42. Функции перемещения и скорости перемещения точек границы сферы в случае одномерных сходящихся сферических волн

Для того, чтобы продемонстрировать особенности решения задачи в данной постановке, конкретизируем вид функции $\varphi(t)$. Пусть функция перемещений точек среды на границе L имеет вид:

$$\varphi(t) = \upsilon_0 t + \frac{\omega_0 t^2}{2}, \tag{4.1}$$

где $\upsilon_0 < 0$ и $\omega_0 > 0$. В результате такого воздействия в момент времени $t = 0$ от границы сферы L отделяется одномерная сферическая сходящаяся волна $\Sigma(t)$ со скоростью c и координатой фронта $r_\Sigma = R - ct$. Перед Σ среда недеформирована, за волной происходит сжатие среды (рис. 43, а), поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial r} < 0$.

Поскольку волна $\Sigma(t)$ является сходящейся, то решение уравнения движения (1.38) при $t \geqslant 0$ будем искать в виде

$$u(r,t) = \left(\frac{\Phi(r - R + ct)}{r}\right)_{,r} = \frac{\Phi'(r - R + ct)}{r} - \frac{\Phi(r - R + ct)}{r^2}. \tag{4.2}$$

Неизвестную функцию $\Phi(\xi(r,t))$ определим из граничного условия $u(R,t) = \varphi(t)$, с учетом которого для функции $\Phi(\xi(r,t))$ из (4.2) можно записать дифференциальное уравнение:

$$\frac{\Phi'(ct)}{R} - \frac{\Phi(ct)}{R^2} = \upsilon_0 t + \frac{\omega_0 t^2}{2}. \tag{4.3}$$

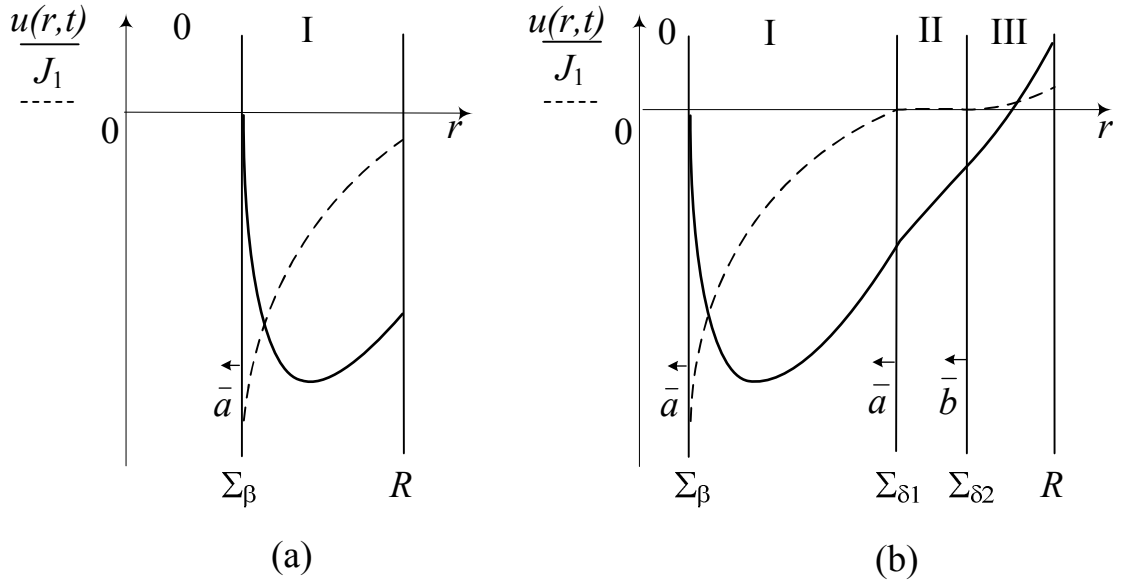


Рис. 43. Возникновение сферического слоя постоянной плотности в случае одномерных сходящихся сферических волн. Решение задачи: (a) – при $0 \leqslant t \leqslant t_1 < t_*$, (b) – решение задачи при $t_* < t < t_2$

Сделав замену переменных $x = ct$, соотношение (4.3) запишем в виде линейного неоднородного уравнения

$$\Phi'(x) = \frac{\Phi(x)}{R} + \frac{\upsilon_0}{c}x + \frac{\omega_0}{2a^2}x^2, \tag{4.4}$$

решение которого состоит из решения однородного уравнения

$$\Phi'(x) = \frac{\Phi(x)}{R}, \qquad \Phi(x) = Ke^{\frac{x}{R}},$$

где K – константа интегрирования, и решения неоднородного уравнения, полагая $K = K(x)$:

$$K'(x)e^{\frac{x}{R}} = R\left(\upsilon_0\frac{x}{c} + \frac{\omega_0}{2}\frac{x^2}{c^2}\right),$$

$$K(x) = -e^{\frac{-x}{R}}\left(\frac{\upsilon_0 R^2}{c}(x+R) + \frac{\omega_0 R^2}{2c^2}(x^2 + 2Rx + 2R^2)\right) + K_0.$$

Подставим решение неоднородного уравнения в решение однород-

ного и получим выражение для функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = -\left(V_0(x+R) + \frac{A_0}{2}(x^2 + 2Rx + 2R^2)\right) + K_0 e^{x/R},$$
$$V_0 = \frac{\upsilon_0 R^2}{c}, \qquad A_0 = \frac{\omega_0 R^2}{c^2}. \tag{4.5}$$

Неизвестную константу интегрирования вычислим из условия $\Phi(0) = 0$. Следовательно, $K_0 = R(V_0 + R2A_0)$, и решение дифференциального уравнения (4.4) имеет вид:

$$\Phi(\eta) = -\left(V_0(\eta+R) + \frac{A_0}{2}(\eta^2 + 2Rx + 2R^2)\right) + R(V_0 + RA_0)e^{\frac{\eta}{R}}. \tag{4.6}$$

Фазовая скорость c уравнения движения (1.38) может принимать значения a или b (1.32) в зависимости от знака инварианта J_1: $c = a$ при $J_1 < 0$ или $c = b$ при $J_1 > 0$. Знак первого инварианта J_1 при $t \geqslant 0$ определим из условия $\mathrm{Sign}(J_1) = \mathrm{Sign}(\Phi''(0))$. Поскольку $\Phi''(0) = \dfrac{V_0}{R}$ и по условию задачи $V_0 < 0$, то при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ инвариант $J_1 < 0$ и $\mathrm{Sign}(J_1) = -1$, а фазовая скорость уравнения движения (1.38) $c = a$.

Возвращаясь к обозначениям $x = r - R + at$, получим следующее решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant t_1$:

$$u^I(r,t) = \begin{cases} \dfrac{2V_0 at + A_0(R^2 + a^2t^2 - r^2) + 2(r-R)(V_0 + A_0 R)e^{\frac{r-R+at}{2}}}{2r^2} \\ \qquad\qquad \text{при } R - at \leqslant r \leqslant R, \\ 0 \qquad\qquad \text{при } 0 < r \leqslant R - at. \end{cases} \tag{4.7}$$

Таким образом, в момент времени $t = 0$ от границы сферы отделяется быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ (согласно введенной в главе 1 классификации разрывов), являющийся волной сжатия, со скоростью a и координатой фронта $r_{\Sigma_\beta} = R - at$ (рис. 43, а).

В момент времени $t = t_1 = -\dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}$ на сферической границе L происходит смена характера воздействия со сжимающего на растягивающее

(времени t_1 соответствует минимум функции $u(r,t)$ на рис. 43, a). При этом знак первого инварианта тензора деформаций J_1 все еще остается отрицательным, т.е. продолжается дальнейшее сжатие среды и перемещения за фронтом волны сжатия $\Sigma_\beta(t)$ по прежнему вычисляются согласно решению (4.7). Определим момент смены знака инварианта J_1. С этой целью решим дифференциальное уравнение второго порядка

$$J_1 = \Phi''(x) = 0,$$

или, что тоже самое,

$$-A_0 + \left(\frac{V_0}{R + A_0}\right) e^{x/R} = 0. \tag{4.8}$$

На границе сферы $x = R$, а фазовая скорость в данном случае принимает значение $c = a$, поэтому согласно (4.8) выход первого инварианта деформаций J_1 на нулевое значение происходит в момент времени

$$t_* = \frac{R}{a} \ln \frac{A_0 R}{A_0 R + V_0} > t_1. \tag{4.9}$$

Такую реакцию разномодульной упругой среды в случае сферических волн назовем *эффектом запаздывания*. Поскольку существует естественное ограничение по времени в задаче $t_* < \dfrac{R}{a} = t_{\text{пред}}$, то запишем логарифмическое неравенство $\ln \frac{A_0 R}{A_0 R + V_0} < 1$, решая которое получим условие на взаимное соотношение между константами υ_0 и ω_0:

$$-\frac{\upsilon_0}{\omega_0} < \frac{R}{a}.$$

Таким образом, в момент времени $t = t_*$ от внешней границы L отделяются две слабых волны $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ (рис. 43, b), поскольку ударная волна разгрузки не может существовать. Первый фронт $\Sigma_{\delta_1}(t)$ движется к центру сферы со скоростью a, координата его фронта меняется согласно соотношению $r_1 = R - a(t - t_*)$, второй фронт $\Sigma_{\delta_2}(t)$

со скоростью b и имеет координаты фронта $r_2 = R - b(t - t_*)$. Между слабыми волнами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ образуется сферический слой, где инвариант $J_1 = 0$ (рис. 43, b). Поскольку именно первый инвариант отвечает за изменение объемных деформаций, слой $R - a(t - t_*) \leqslant r \leqslant R - b(t - t_*)$, где значение J_1 равно нулю, будет областью постоянной плотности ($\rho/\rho_0 = 1$). При этом следует отметить, что равенство нулю первого инварианта $J_1 = \dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\dfrac{u}{r}$ в целом не означает, что деформации в этом слое отсутствуют, как это было в случае плоских одномерных волн (глава 3). Ширина области между волнами $\Sigma_\beta(t)$ и $\Sigma_{\delta_1}(t)$ постоянна: $r_1 - r_\Sigma = at_*$; между волнами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ ширина слоя растет линейно со временем: $r_2 - r_1 = (a - b)(t - t_*)$; слой между слабой волной $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и границей сферы также растет линейно со временем: $R - r_2 = b(t - t_*)$. За волной $\Sigma_{\delta_2}(t)$ среда переходит в растянутое состояние ($J_1 > 0$) (рис. 43, b).

Решение в области II (рис. 43, b) между слабыми волнами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$ будем искать из условия равенства нулю первого инварианта тензора деформаций в этой области. Дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\dfrac{u}{r} = 0$ имеет следующее решение:

$$u^{II}(r,t) = \frac{Z(t)}{r^2}.$$

Чтобы определить неизвестную функцию $Z(t)$, воспользуемся условием непрерывности перемещений на волне $\Sigma_{\delta_1}(t)$:

$$u^I\Big|_{\xi_1} = u^{II}\Big|_{\xi_1}. \tag{4.10}$$

На фронте $\Sigma_{\delta_1}(t)$ функция перемещений $u^I(r,t)$ с учетом соотношения (4.2) примет вид:

$$u^I = \frac{\Phi'(at_*)}{R - a(t - t_*)} - \frac{\Phi(at_*)}{(R - a(t - t_*))^2}. \tag{4.11}$$

Зависимости (4.5), (4.10) и (4.11) позволяют найти неизвестную функцию $Z(t)$:

$$Z(t) = R^2\varphi(t_*) + a(V_0 + A_0 a t_*)(t - t_*).$$

Следовательно, решение задачи между слабыми волнами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ имеет вид

$$u^{II}(r,t) = \frac{R^2\varphi(t_*) + a(V_0 + A_0 a t_*)(t - t_*)}{r^2}. \tag{4.12}$$

В области III (рис. 43, b) между слабым волновым фронтом $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и границей сферы R решение задачи будем строить на основе предположения, что $\Sigma_{\delta_2}(t)$ является сходящейся волной. Тогда функцию перемещений $u^{III}(r,t)$ будем искать в виде

$$u^{III}(r,t) = \frac{F'(r - R + b(t - t_*))}{r} - \frac{F(r - R + b(t - t_*))}{r^2}. \tag{4.13}$$

Неизвестную функцию $F(\theta(r,t))$ определим из условия на границе сферы $u(R,t) = \varphi(t)$. Для F получаем следующее неоднородное уравнение первого порядка:

$$F'(y) = \frac{F(y)}{R} + B_0 + B_1 y + B_2 y^2, \qquad y = b(t - t_*), \tag{4.14}$$

где

$$B_0 = R\varphi(t_*), \qquad B_1 = \frac{R}{b}\varphi'(t_*), \qquad B_2 = R\frac{\omega_0}{2b^2}.$$

Решением однородного уравнения

$$F'(y) = \frac{F(y)}{R} \tag{4.15}$$

является функция

$$F(y) = N(y)e^{\frac{y}{R}}. \tag{4.16}$$

Подставляя (4.16) в линейное неоднородное уравнение (4.14), получим его решение:

$$N(y) = -Re^{\frac{y}{R}}\left(B_0 + B_1(y+R) + B_2(y^2 + 2Ry + 2R^2)\right) + N_0, \quad (4.17)$$

где N_0 – константа интегрирования. Используя (4.17), из (4.14) получаем соотношение для функции $F(\theta(r,t))$:

$$F(\theta) = -R\left(B_0 + B_1(\theta+R) + B_2(\theta^2 + 2R\theta + 2R^2)\right) + N_0 e^{\theta/R}, \quad (4.18)$$

Неизвестную константу интегрирования N_0 в соотношении (4.18) определим из условия непрерывности перемещений на слабой волне $\xi_2(t)$:

$$u^{II}\Big|_{\xi_2} = u^{III}\Big|_{\xi_2}. \quad (4.19)$$

Используя соотношения (4.12), (4.13) и (4.18), запишем условие (4.19) в форме:

$$R^2\varphi(t_*) + a(V_0 + A_0 a t_*)(t - t_*) = F'(0)R - F(0) - F'(0)b(t - t_*) \quad (4.20)$$

где

$$F(0) = -R(B_0 + B_1 R + 2B_2 R^2) + N_0,$$
$$F'(0) = -R(B_1 + 2B_2 R) + \frac{N_0}{R}.$$

Полученное уравнение (4.20) имеет решение, если коэффициенты при одинаковых степенях $(t - t_*)$ равны, т.е. имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} F'(0)R - F(0) = R^2\varphi(t_*), \\ -F'(0)b = a(V_0 + A_0 a t_*). \end{cases} \quad (4.21)$$

Решая систему уравнений (4.21), получим, что с одной стороны,

$$F'(0) = -\frac{R^2}{b}\varphi'(t_*), \qquad F(0) = -\frac{R^3}{b}\varphi'(t_*) - R^2\varphi(t_*), \quad (4.22)$$

а с другой стороны, из соотношения (4.18) имеем:

$$F'(0) = -R\left(B_0 + B_1 R + 2B_2 R^2\right) + N_0. \tag{4.23}$$

Следовательно, константа N_0 вычисляется по формуле

$$N_0 = \frac{R^4}{b^2}\varphi''(t_*),$$

подставляя которую в соотношение (4.18), получаем:

$$\begin{gathered} F(\theta) = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + N_0 e^{\theta/R}, \\ D_0 = -R^2\varphi(t_*) - \frac{R^3}{b}\varphi'(t_*) - \frac{R^4}{b^2}\varphi''(t_*), \\ D_1 = -\frac{R^2}{b}\varphi'(t_*) - \frac{R^3}{b^2}\varphi''(t_*), \quad D_2 = -\frac{R^2\varphi''(t_*)}{2b^2}. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Таким образом, решение задачи между полученными волновыми фронтами $\Sigma(t)$, $\Sigma_{\delta_1}(t)$, $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и границей сферы $r = R$ при $t > t_*$ имеет вид (рис. 43, b):

$$u(r,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0<r\leqslant R-at, \\ \dfrac{\Phi'(r-R+at)}{r} - \dfrac{\Phi(r-R+at)}{r^2} & \text{при } R-at\leqslant r\leqslant R-a(t-t_*), \\ \dfrac{R^2\varphi(t_*)+a(V_0+A_0at_*)(t-t_*)}{r^2} & \text{при } R-a(t-t_*)\leqslant r\leqslant R-b(t-t_*), \\ \dfrac{F'(r-R+b(t-t_*))}{r} - \dfrac{F(r-R+b(t-t_*))}{r^2} & \\ & \text{при } R-b(t-t_*)\leqslant r\leqslant R, \end{cases}$$

где

$$\Phi(\eta) = -V_0(\eta + R) - \frac{A_0}{2}\left(\eta^2 + 2R\eta + 2R^2\right) + R\left(V_0 + A_0 R\right)e^{\eta/R},$$

а функция $F(\theta)$ вычисляется из соотношения (4.24).

4.2 Возникновение расходящихся волн

Рассмотрим разномодульную упругую среду, в которой расположено сферическое отверстие радиуса r_0. До начала воздействия среда

недеформирована, с момента времени $t = 0$ на внутреннюю границу сферы действует нагрузка, приводящая точки границы сферы в движение по закону (4.1), но теперь $\upsilon_0 > 0$, $\omega_0 < 0$ (рис. 44), т.е. сначала на границу действуют сжимающие усилия, а с момента времени t_1 – растягивающие.

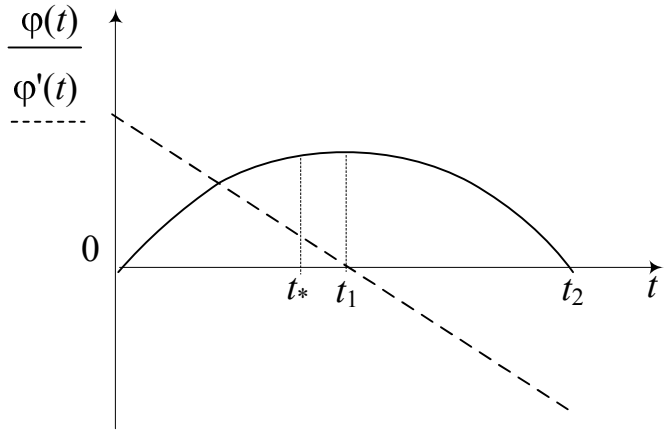


Рис. 44. Функции перемещения и скорости перемещения точек границы сферы в случае одномерных сходящихся сферических волн

Решение задачи строится так же, как и в случае сходящихся сферических волн. Под действием нагрузки в момент времени $t = 0$ от границы сферического отверстия распространяется в среду расходящаяся волна – быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a, за которым происходит сжатие среды. Функция перемещений в области $r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + at$ (зона I на рис. 45, а) имеет вид

$$u^I(r,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } r_0 + at \leqslant r \leqslant \infty, \\ \dfrac{H'(r - r_0 - at)}{r} - \dfrac{H(r - r_0 - at)}{r^2} & \text{при } r_0 < r \leqslant r_0 + at, \end{cases} \tag{4.25}$$

$$H(\theta) = V_0(\theta + r_0) - \frac{A_0}{2}(\theta^2 + 2r_0\theta + 2r_0^2) + r_0(A_0 r_0 - V_0)e^{\theta/r_0}.$$

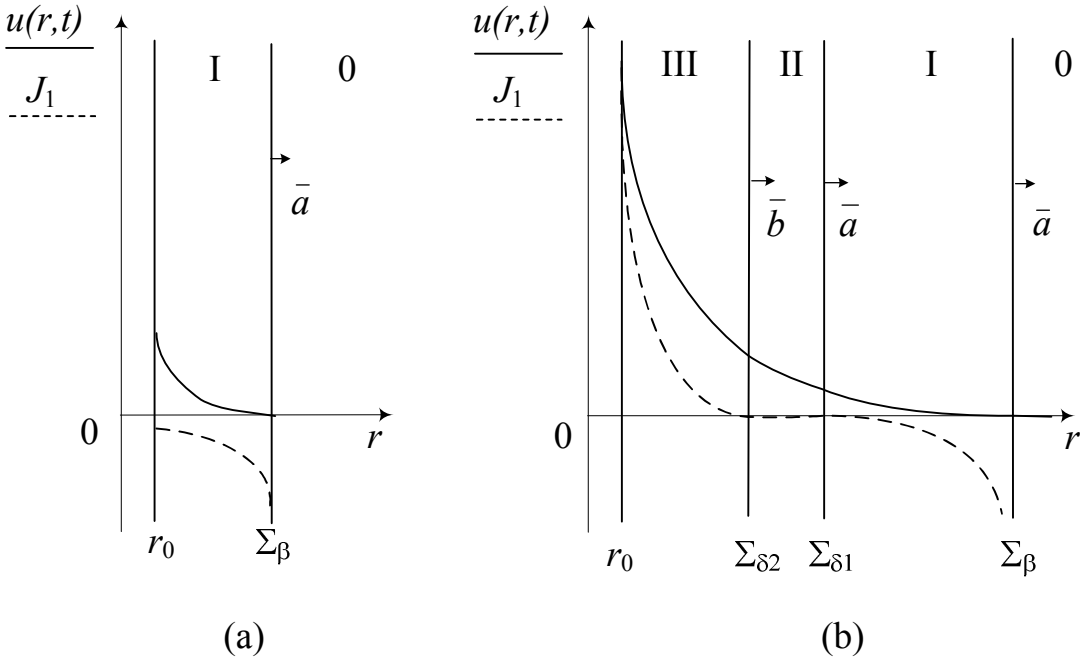


Рис. 45. Возникновение сферического слоя постоянной плотности в случае одномерных расходящихся сферических волн: (a) – решение задачи при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, (b) – решение задачи при $t > t_*$

Первый инвариант тензора деформаций J_1 в области $r_0 < r \leqslant r_0 + at$ отрицательный. Смена знака инварианта происходит в момент времени

$$t_* = -\frac{r_0}{a} \ln \frac{A_0 r_0}{A_0 r_0 - V_0} < t_1.$$

Таким образом, J_1 меняет знак раньше, чем меняется вид нагрузки на границу сферического отверстия. В момент времени t_* от границы сферического отверстия радиуса r_0 отделяются два слабых фронта: быстрый волновой фронт $\Sigma_{\delta_1}(t)$ со скоростью a и медленный – $\Sigma_{\delta_2}(t)$ – со скоростью b. Между слабыми волнами $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$, как и в задаче о возникновении сходящихся волн, образуется сферический слой, который является областью постоянной плотности ($\rho/\rho_0 = 1$), где инвариант $J_1 = 0$. Ширина области между волнами $\Sigma_\beta(t)$ и $\Sigma_{\delta_1}(t)$ постоянна, а между простыми волнами и между слабой волной $\Sigma_{\delta_2}(t)$

и границей сферы растет линейно со временем. За волной $\Sigma_{\delta_2}(t)$ среда переходит в растянутое состояние $(J_1 > 0)$ (рис. 45, b). Решение задачи между полученными волновыми фронтами $\Sigma(t)$, $\Sigma_{\delta_1}(t)$, $\Sigma_{\delta_2}(t)$ и границей сферы $r = r_0$ при $t > t_*$ имеет вид

$$u(r,t)=\begin{cases} 0 & \text{при } r_0+at\leqslant r\leqslant\infty, \\ \dfrac{H'(r-r_0-at)}{r}-\dfrac{H(r-r_0-at)}{r^2} & \text{при } r_0+a(t-t_*)<r\leqslant r_0+at, \\ \dfrac{r_0^2\varphi(t_*)+a(V_0+A_0at_*)(t-t_*)}{r^2} & \text{при } r_0+b(t-t_*)\leqslant r\leqslant r_0+a(t-t_*), \\ \dfrac{\Phi_1'(r-r_0-b(t-t_*))}{r}-\dfrac{\Phi_1(r-r_0-b(t-t_*))}{r^2} & \\ & \text{при } r_0\leqslant r\leqslant r_0+b(t-t_*), \end{cases}$$

где

$$\Phi_1(\theta) = K_0 + K_1\theta + K_2\theta^2 + N_1 e^{\theta/R},$$

$$K_0 = -r_0^2\varphi(t_*) + \frac{r_0^3}{b}\varphi'(t_*) - \frac{r_0^4}{b^2}\varphi''(t_*),$$

$$K_1 = -\frac{r_0^2}{b}\varphi'(t_*) - \frac{r_0^3}{b^2}\varphi''(t_*), \quad K_2 = -\frac{r_0^2\varphi''(t_*)}{2b^2}, \quad N_1 = \frac{r_0^4\varphi''(t_*)}{b^2}.$$

а функция $H(\theta)$ вычисляется из соотношения (4.25).

Таким образом, представленные в этой главе решения краевых задач показывают принципиальное отличие процесса распространения одномерных сферических волн [43] в кусочно-линейной разномодульной среде от результатов решения подобных задач с плоскими поверхностями разрывов [45].

Заключение

В заключение приведем основные результаты диссертации.

– исходя из законов сохранения, описывающих динамическое деформирование изотропной упругой среды в адиабатическом приближении, получены зависимости напряжений и деформаций для упругих сред с усложненными механическими свойствами (несжимаемая нелинейно-упругая среда, разномодульная среда Мясникова-Олейникова, разномодульная среда без эффекта дилатации, разномодульная среда с различным сопротивлением сдвигу вдоль выбранной оси);

– в рамках модели несжимаемой нелинейно-упругой среды получено аналитическое решение автомодельной задачи о взаимодействии двух идущих навстречу друг другу плоских сдвиговых ударных волн, поляризованных в различных плоскостях; показано, что при их отражении формируется две группы волновых фронтов - ударных и простых волн Римана; указаны критерии для определения на этапе постановки задачи типа возникающих волновых фронтов (ударный или слабый) исходя из начальных параметров задачи (интенсивности и направленности сдвигов на взаимодействующих волнах);

– в рамках математической модели разномодульной упругой среды Мясникова-Олейникова на основе введенной классификации обобщенных решений одномерного уравнения движения получены аналитические решения нестационарных краевых задач динамического одноосного деформирования разномодульной упругой среды: о возникновении ударной волны и области постоянных перемещений со слабыми волнами в качестве переднего и заднего фронтов при ударном нагружении границы упругого полупространства, об отражении плоской одномер-

ной волны от жестко закрепленной границы разномодульного упругого слоя, об отражении плоских одномерных волн сжатия и разряжения от свободной границы разномодульного упругого слоя; указаны принципиальные отличия полученных решений от известных результатов аналогичных задач классической теории упругости;

– получено решение нестационарной краевой задачи об ударном сдвиге на границе полупространства в несжимаемой разномодульной среде, показана возможность возникновения в обобщенном решении уравнения движения ударных волн, областей недеформированного материала;

– в рамках математической модели разномодульной среды, свободной от эффекта дилатации (взаимного влияния объемных и сдвиговых деформаций при распространении граничных возмущений) получено решение нестационарных краевых задач о сходящихся и расходящихся одномерных сферических волнах; показана возможность возникновения сферического слоя постоянной плотности при нагружении сферической границы по типу «растяжение-сжатие» и «сжатие-растяжение», при этом момент возникновения слоя в первом случае отстает от момента смены знака граничный нагрузки (эффект «запаздывания») и наоборот, опережает во втором случае.

Литература

[1] Агапов Е.И., Белогорцев А.И., Буренин А.А., Резунов А.В. Автомодельная задача об одномерном соударении двух полупространств из нелинейно-упругого материала // ПММ. 1989. № 6. С. 146-150.

[2] Агапов Е.И., Буренин А.А., Резунов А.В. О соударении двух нелинейно-упругих тел с плоскими границами // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1990. С. 206-215.

[3] Амбарцумян С.А. Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1966. Т. 19. № 2. С. 33-46.

[4] Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Мех. тв. тела. 1966. № 2. С. 18-24.

[5] Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.

[6] Баскаков В.А., Быковцев Г.И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. № 1. С. 71–72.

[7] Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. № 4-2. С. 9-13. ISSN 1816-9791.

[8] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

[9] Блейх Г.Г., Нельсон Дж. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок // ПММ. 1966. № 1. С. 145-156.

[10] Блейх Г.Г., Мэтьюз А.Т. Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства // Механика: Сб. пер. 1968. №1 (107). С. 123-155.

[11] Болотин В.В., Москаленко В.Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды // Прикл. механика и техн. физика. 1968. №1. С. 94-106.

[12] Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 3-8.

[13] Буренин А.А. Движение ступенчатой нагрузки со сверхсейсмической скоростью по границе нелинейно-упругого полупространства // Тр. НИИ матем., Воронеж: Изд -во ВГУ. 1973. Вып. 8. С. 1-5.

[14] Буренин А.А., Дудко О.В. О распространении ударных возмущений в предварительно деформированной разномодульной упругой среде // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела: Сборник научных трудов. Владивосток: ИМиМ ДВО РАН. 1997. С. 20-35.

[15] Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал

индустриальной математики. Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2011. Т. 14. № 4(48). С. 14-23.

[16] Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А. Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28 : международный научно-технический сборник / под ред. А.В. Чигарева ; БНТУ. Минск. 2013. С. 16-21.

[17] Буренин А.А., Лапыгин В.В., Чернышов А.Д. К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости // В кн.: Нелинейные волны деформаций. Материалы международного симпозиума. Таллин. 1978. Т. 2. С. 25-28.

[18] Буренин А.А., Лапыгин В.В. Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 722-729.

[19] Буренин А.А., Лапыгин В.В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // ПМТФ. 1985. № 5. С. 125-129.

[20] Буренин А.А., Нгуен Хыу Тхань, Чернышов А.Д. О распространении ударных волн при плоской конечной деформации // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 900-904.

[21] Буренин А.А., Чернышов А.Д. Взаимодействие ударной волны с границей раздела двух сред с нелинейными свойствами // В кн.: Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах. Тр. симпозиума / Горький–Таллин. 1973. Т. 2. С. 44 -51.

[22] Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711-717.

[23] Буренин А.А., Ярушина В.М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопростивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 100-106.

[24] Бурштейн Л.С. Статические и динамические испытания горных пород. М.: Недра, 1970. 176 с.

[25] Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений // IV Всесоюз. симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн: Тез. докл. Кишенев, 1968. С. 18–19.

[26] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[27] Быковцев Г.И., Колокольчиков А.В., Сыгуров П.Н. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // ПМТФ. 1984. № 6. С. 148-156.

[28] Гаврилов Д.А. Зависимости между напряжениями и деформациями для квазилинейного разномодульного тела // Проблемы прочности. 1979. № 9. С. 10-12.

[29] Гасилов В.А., Головин М.В. О расчетах упругих деформаций на основе модели изотропно-упругой разномодульной среды // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 4. С. 117-127.

[30] Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: "Наука 1978. 303 с.

[31] Головенко В.С., Мидуков В.З., Седоков Л.М. Прочность и деформируемость серого чугуна при всестороннем неравномерном сжатии // Проблемы прочности. 1973. № 1. С. 56-58.

[32] Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.

[33] Гольдштейн М.Н. Механические свойства грунтов. М.: Стройиздат, 1979. 304 с.

[34] Дудко О.В. Автомодельная задача об одномерном ударном нагружении упругого массива с предварительными деформациями и микронарушениями // Проблемы естествознания и производства. Владивосток: Изд-во ДВГТУ. 1996. Вып. 117, сер. 5. С. 17-20.

[35] Дудко О.В. Особенности решения одномерных краевых задач динамического деформирования разномодульной упругой среды // Математические модели и методы механики сплошных сред: Сб. научных трудов: К 60-летию А.А. Буренина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. 2007. С. 80-87.

[36] Дудко О.В., Лаптева А.А. Особенности решения автомодельной задачи о распространении ударных возмущений в несжимаемой упругой среде // Актуальные проблемы прикладной математики, ин-

форматики и механики : Сборник трудов Международной конференции. Воронеж : издательско-полиграфический центр ВГУ, 2010. С. 141-143.

[37] Дудко О.В., Лаптева А.А. Особенности одномерного взаимодействия двух плоских разнополяризованных ударных волн в несжимаемой упругой среде // Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1 : Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара : СамГТУ, 2011. С. 101-104.

[38] Дудко О.В., Лаптева А.А. Математическое моделирование разномодульных деформационных свойств твердого тела в рамках кусочно-линейной теории упругости // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар имени ак. Е.В. Золотова: сб. материалов [электронный ресурс], 4-10 сентября 2012 г., Владивосток. - Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 115-118.

[39] Дудко О.В., Лаптева А.А. Отражение ударных возмущений от свободной границы несжимаемого упругого слоя с разномодульными сдвиговыми свойствами // Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения": материалы конференции, 27 августа-1 сентября 2012, Самара. - Самара:СамГТУ, 2012. С. 123-124.

[40] Дудко О.В., Лаптева А.А. К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу // Сибирский журнал индустриальной математики. Новоси-

бирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2013. Т. XVI, № 1(53). С. 21-28.

[41] Дудко О.В., Лаптева А.А. Об отражении плоской одномерной волны нагрузки от свободной границы несжимаемого упругого слоя с разномодульным сопротивлением сдвигу // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС‘2013), 22-31 мая 2013 г., Алушта. - М.: Изд-во МАИ, 2013. С. 339-341.

[42] Дудко О.В., Лаптева А.А. О распространении одномерных сферических волн в разномодульной упругой среде // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи 21-23 мая 2013 г., Самара. - Самара: СамГТУ, 2013. Ч. 1. С. 100-103.

[43] Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 147-155.

[44] Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. Возникновение ударной волны в линейной упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Сборник трудов международной школы-семинара "Современные проблемы механики и прикладной математики 24-28 мая, 2004 г., Воронеж. Воронеж : ВГУ, 2004. Ч. 1, Т. 1. С. 200-202.

[45] Дудко О.В., Лаптева А.А. Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде,

по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6. С. 94-105.

[46] Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. Задачи одномерного отражения ударных возмущений от свободной границы разномодульного упругого слоя // Современные проблемы механики и прикладной математики : Сборник трудов международной школы-семинара. Часть I. 12-17 сентября, 2005, Воронеж. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2005. С. 136-139.

[47] Дудко О.В., Лаптева А.А., Чигарев А.В. О моделировании разномодульных свойств упругой среды // Сб. статей по материалам международной научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий 12-15 августа 2013 г., Чебоксары. - Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. Ч. 1. С. 88-93.

[48] Дудко О.В., Лаптева А.А., Чигарев А.В. К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 41-47.

[49] Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача нелинейной динамической теории упругости о взаимодействии продольной ударной волны с жесткой преградой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1. С. 27-37.

[50] Дудукаленко В.В., Минаев В.А. К расчету предела пластичности композитных материалов // ПММ. 1970. Т. 34, № 5. С. 867-875.

[51] Заверзина Н.А., Филатов Г.Ф. Об ударных волнах в деформированной упругой среде // В кн.: Нелинейные волны деформаций. Материалы международного симпозиума. Таллин. 1978. Т. 2. С. 70-73.

[52] Золочевский А.А. Определяющие уравнения и некоторые задачи разномодульной теории упругости анизотропных материалов // Прикл. механика и тех. физика. 1984. № 4. С. 131-138.

[53] Золочевский А.А. Определяющие уравнения нелинейного деформирования с тремя инвариантами напряженного состояния // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 3. С. 74-80.

[54] Ивлев Д.Д. К построению теории упругости // Докл. Ан СССР, 1961. Т. 138. № 6. С. 1321-1324.

[55] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющего пластического тела. М.: "Наука 1971. 231 с.

[56] Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: "Наука 1978. 208 с.

[57] Капустянский С.М. Анизотропия геоматериалов // Итоги науки и техн. Мех. деф. тв. тела. 1986. Т. 18. С. 53-113.

[58] Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.

[59] Ковальчук Б.И., Лебедев А.А. Деформационные свойства серого чугуна при плоском напряженном состоянии в условиях низких температур // Проблемы прочности. 1970. № 7. С. 9-13.

[60] Ковшов А.Н. О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6 С. 82-88.

[61] Ковшов А.Н., Скобеев А.М. Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку // Изв. АН СССР, МТТ. 1973. № 1. С. 54-59.

[62] Кондауров В.И. Отражение плоской поперечной волны от свободной границы полупространства // В кн.: Труды научной конф. МФТИ. Сер. Аэромеханика. Процессы управления. Долгопрудный. 1973. С. 105-111.

[63] Куликовский А.Г. Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии // Тр. Мат. Ин-та АН СССР, 1989. С. 132-139.

[64] Куликовский А.Г. Влияние малой анизотропии на свойства ударных волн в сжимаемой упругой среде // ПММ, 1995. Т. 5, № 5. С. 793-798.

[65] Куликовский А.Г., Пекуровская Л.А. О фронтах сильного и слабого разрыва в решениях уравнений разномодульной теории упругости // ПММ. 1989. Т. 53, № 2. С. 294–300.

[66] Куликовский А.Г., Пекуровская Л.А. О продольных волнах в упругой среде с кусочно-линейной зависимостью напряжения от деформации // ПММ. 1990. Т. 54, вып. 5. С. 807–813.

[67] Куликовский П.Г., Свешникова Е.И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 3. С. 523-534.

[68] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно на-пряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 831-840.

[69] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространств // В кн. Вопросы нелинейной механики сплошных сред. Таллин: "Валгус 1985. С. 135-145.

[70] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 2. С. 284 -291.

[71] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.

[72] Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Об устойчивости квазипоперечных ударных волн в анизотропных упругих средах // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1020-1026.

[73] Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1119-1126.

[74] Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией. Современные проблемы математики. М.: МИАН. 2007. Вып. 7. 150 с.

[75] Лаптева А.А., Дудко О.В. Взаимодействие плоских одномерных волн нагрузки в несжимаемой упругой среде // Сборник докладов [Электронный ресурс] Всероссийской научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова "Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления 11-17 сентября 2011 г., Владивосток. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 97-100.

[76] Лаптева А.А., Негодина Л.С. О способах построения математической модели упругой среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Материалы региональной научно-практической конференции «Молодежь и научно-технический прогресс», апрель-июль 2011 г., Владивосток. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2011. Ч. 1. С. 360-361.

[77] Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Ламашевский В.П. О коэффициенте поперечной деформации углеродистой стали и серого чугуна при нормальной и низкой температурах // Проблемы прочности. 1991. № 3. С. 51-56.

[78] Лебедева Н.Ф. Одномерная автомодельная задача распространения ударных возмущений по несжимаемой упругой среде // В сб.: Проблемы естествознания и производства. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 1993. Вып. 3. Сер. 5. С. 30-33.

[79] Лебедева Н.Ф., Леухина Ю.П., Манцыбора А.А. Одномерная задача взаимодействия плоскополяризованных сдвиговых удар-ных волн в несжимаемой упругой среде // В сб.: Проблемы есте-

ствознания и производства. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 1996. Вып. 117. Сер. 5. С. 29-32.

[80] Ленский Э.В. Об ударной адиабате плоского продольно-сдвигового разрыва // Вестник МГУ. Сер. матем. и механика, 1981. № 1. С. 94-96.

[81] Ленский Э.В. Аналитические методы динамической теории нелинейной упругости. М.: Изд-во МГУ, 1983. 71 с.

[82] Ленский Э.В. Простые волны в нелинейно-упругой среде // Вестник МГУ. Сер. матем. и механика, 1983. № 3. С. 80-86.

[83] Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1978. № 6. С. 29-34.

[84] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.

[85] Лушников В.В., Вулис П.Д., Литвинов Б.М. О соотношении модулей деформации при сжатии и растяжении грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1973. № 6. С. 18-19.

[86] Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71-75.

[87] Ляховский В.А., Мясников В.П. Разномодульность, анизотропия и отражающие границы // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 11. С. 69-73.

[88] Ляховский В.А. Применение разномодульной модели к анализу напряженно-деформированного состояния горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 2. С. 89-94.

[89] Манцыбора А.А., Семенов К.Т. Одномерная автомодельная задача об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4, ч. 2. С. 136-142.

[90] Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419-437.

[91] Маслов В.П., Мосолов П.П., Соснина Е.В. О типах разрывов решений уравнений продольных, свободных, одномерных движений в разномодульной упругой среде // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус. 1985. С. 108-118.

[92] Матченко Н.М., Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инж. журн. МТТ. 1968. № 6. С. 108-110.

[93] Матченко Н.М., Толоконников Л.А.. Трещев А.А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. 41: Квазилинейные соотношения // Изв. РАН, МТТ. 1995. № 1. С. 73-78.

[94] Матченко Н.М., Толоконников Л.А., Трещев А.А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. 42: Нелинейные соотношения // Изв. РАН, МТТ. 1999. № 4. С. 87-95.

[95] Матченко Н.М., Трещев А.А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Тула: Изд-во ТулГУ, 2000. 149 с.

[96] Мясников В.П. Геофизические модели сплошных сред // Материалы V Всевоюз. съезда по теор. и прикл. механике: тез. докл. М.: Наука, 1981. С. 263–264.

[97] Мясников В.П., Олейников А.И. Уравнения теории упругости и условие текучести для линейно дилатирующих сред // ФТПРПИ. 1984. № 6. С. 14-19.

[98] Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Доклады АН СССР. 1992. Т. 322, № 1. С. 57-60.

[99] Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся материалов. Владивосток: Дальнаука. 2007. 172 с.

[100] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: "Гостехиздат 1948. 211 с.

[101] Олейников А.И. Уравнения теории упругости и условие разрушения для разномодульных материалов // ФТПРПИ. 1986. № 1. С. 12-19

[102] Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 153-159.

[103] Олейников А.И. Модели гетерогенно-сопротивляющихся изотропных сред. Докторская диссертация. Владивосток. 1994. 259 с.

[104] Олейников А.И. Об описании деформирования гетерогенно-сопротивляющихся материалов // Доклады АН СССР. 1998. Т. 361. № 6. С. 314-316.

[105] Олейников А.И., Могильников Е.В. Единственность решения краевых задач и устойчивость для разномодульного нелинейного материала // Дальневосточный математический журнал, 2002. Т. 3. № 2. С. 242-253.

[106] Панферов В.М. Теория упругости и деформационная теория пластичности для твердых тел с разными свойствами на сжатие, растяжение и кручение // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 1. С. 41-44.

[107] Перссон К.О. Давление в ударной волне при косом соударении. Теоретическое исследование // В кн.: Нестационарные процессы в деформируемых телах. М.: Мир. 1976. С. 132-149.

[108] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.

[109] Ржевский В. В., Новик Г. Я. Основы физики горных пород: Учебник для вузов. М.: Недра, 1984. 359 с.

[110] Руппенейт К.В. Деформируемость массивов трещиноватых горных пород. М.: "Недра 1975. 233 с.

[111] Сабодаш П.Ф., Тихомиров Н.А., Навал И.К. Автомодельные движения физически нелинейной упругой среды, вызванные локальным выделением энергии // В кн.: Нелин. волны деформаций. Матер. межд. симп. Таллин. 1978. Т. 2. С. 145-148.

[112] Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в механике сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.

[113] Саркисян М.С. О соотношениях теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 87-94.

[114] Свешникова Е.И. Квазипоперечные ударные волны в упругой среде при специальных видах начальной деформации // ПММ, 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 673-678.

[115] Свешникова Е.И. Ударные волны в слабоанизитропном упругом несжимаемом материале // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 144-153.

[116] Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматлит, 1962. 284 с.

[117] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн. М.: "Наука 1973. Т. 1. 536 с. Т. 2. 584 с.

[118] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Изд. 8-е, переработанное. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука". 1977. 440 с.

[119] Скобеев, А.М., Флитман Л.М. Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 189-192.

[120] Толоконников Л.А. Вариант разномодульной теории упругости // Механика полимеров. 1968. № 2. С. 36-38.

[121] Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. М.: "Высшая школа 1979. 318 с.

[122] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.

[123] Туровцев Г.В. О построении определяющих уравнений для изотропных упругих сред с усложненными свойствами // ДСС. СО АН СССР. 1981. № 53. С. 132-143.

[124] Филатов Г.Ф. О распространении волн в нелинейной теории упругости // Сб. научн. тр. факультета ПММ. Воронеж: Изд -во ВГУ, 1971. Вып. 2. С. 137-142.

[125] Филатов Г.Ф. Об устойчивости сильных разрывов в нелинейной теории упругости // Сб. научн. трудов фак-та ПММ. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1971. Вып. 1. С. 62-64.

[126] Филатов Г.Ф. О распространении продольных и поперечных ударных волн в упругой среде // Прикл. механика и тех. физика. 1972. Т. 3. С. 186-188.

[127] Филатов Г.Ф. О деформировании микронеоднородной упругой среды при конечных деформациях // Механика деформ. тв. тела. Куйбышев: Куйбышевский гос. университет. 1976. Вып. 2. С. 44-47.

[128] Хан Х. Теория упругости. М.: "Мир 1988. 344 с.

[129] Цвелодуб И.Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов // ДСС. СО АН СССР. 1977. № 32. С. 123-131.

[130] Черных Е.М. Автомодельная задача об ударном нагружении нелинейно-упругого материала // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 793-799.

[131] Черных Е.М. О распространении волн в упругой среде с конечными деформациями // Изв. АН СССР. МТТ, 1967. № 4. С. 74-79.

[132] Черных Е.М. Термодинамические соотношения на поверхности сильного разрыва в упругой среде при конечных деформациях // Докл. АН СССР, Т. 177. 1967. № 3. С. 546-549.

[133] Черных К.Ф. Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 1. С. 3-30.

[134] Черных К.Ф., Шубина И.Н. Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов // В кн.: Механика эластомеров. Краснодар. 1977. Т. 1. С. 54-64.

[135] Чернышов А.Д. О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 885-890.

[136] Чигарев А.В. К расчету макроскопических коэффициентов стохастически неоднородных упругих сред // ПММ. 1974. Т. 38, № 5. С. 832-838.

[137] Чугайнова А.П. О взаимодействии нелинейных волн в слабоанизотропной упругой среде // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 75-81.

[138] Чугайнова А.П. Автомодельная задача о действии бегущей нагрузки на границу нелинейного упругого слабоанизотропного полупространства // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 102-109.

[139] Чугайнова А.П. Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 147. № 2. С. 240–256.

[140] Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1966. № 2. С. 123-125.

[141] Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: «Наука», 1977. 400 с.

[142] Biot M.A. Mechanics of incremental deformation. New York: Wil-ley, 1965. 504 p.

[143] Bland D.R. Dilatational waves and shocks in large displacement isentropic dynamical elasticity // J. Mech. Phys. Solids, 1964. V. 12. P. 245-267.

[144] Bland D.R. Finite elastodynamics // J. Inst. Mach. Applic., 1966. P. 327-342.

[145] Bland D.R. Recent progress in Applied Mechanics, the folke odquist volume // Stochholm, 1967. P. 91-124.

[146] Chy Boa-Teh. Finite amplitude waves in incompressible perfectly elastic materials // J. Mech. Phys. Solids, 1964. V. 12. № I. P. 45-57.

[147] Chy Boa-Teh. Transverse chock waves in incompressible elastic solids // J. Mech. Phys. Solids, 1967. V. 15. № I. P. 1-14.

[148] Jones B.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA Journ. 1977. V. 15. № 1. P. 51-53.

[149] Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331, № 20. P. 4464-4480.

[150] Gavrilov S.N. On the acoustic excitation of a heteromodular bar // Proc. of XXXIII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics” 2005 / Ed. by D.A. Indeitsev ; IPME RAS. St. Petersburg, 2005. P. 205–215.

[151] Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. New York: Willy; London: Chapman, 1951. 140 p.

[152] Rivlin R.S., Saunders D.W. Large elastic deformation of isotropic materials. Experiments of the deformation of rubber // Phil. Roy. Soc. London, 1951. V. 243. P. 251-288.