На правах рукописи

ЛАПТЕВА Анастасия Александровна

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПО УПРУГИМ СРЕДАМ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Чебоксары — 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН Буренин Анатолий Александрович
Официальные оппоненты:	Филатов Геннадий Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, профессор кафедры математики
	Гаврилов Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, Институт проблем машиноведения РАН, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, г. Москва

Защита состоится «19» июня 2014 г. в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева» по адресу: 428000, Чувашская Республика, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38, ауд. 406.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВПО ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева», http://www.chgpu.edu.ru/zaschita-dissertaciy. Электронная версия автореферата размещена на сайте ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации http://vak2.ed.gov.ru и на официальном сайте ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева» http://www.chgpu.edu.ru.

Автореферат разослан « » 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета С.В. Тихонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Соотношения классической теории упругости, основанные на постулате о нормально-изотропном поведении упругих сред и линейной зависимости между напряжениями и деформациями, являются результатом идеализации реальных свойств деформируемых материалов. Такие допущения позволяют упростить не только построение определяющих соотношений теории, но и методы решения соответствующих краевых задач. Но для большинства природных и конструкционных материалов такие условия принципиально неприемлемы. Примером здесь могут служить образцы, изготовленные из различных грунтовых фракций, которые могут выдерживать значительные сжимающие нагрузки и практически не сопротивляться растягивающим усилиям. Учет подобных специфических механических свойств (нелинейной связи между напряжениями и деформациями, разномодульности) приводит к неклассическим моделям упругих сред. В настоящее время построен ряд таких моделей при разных вводных предположениях. Нелинейность, наличие сингулярности в реакции на направление воздействия, отраженные в этих моделях, вносят новые качественные особенности в свойства модельных уравнений и выводят их за рамки классической математической физики. Диссертация посвящена изучению особенностей постановок краевых задач ударного нагружения несжимаемых нелинейно-упругих сред, материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию, сред с различной сопротивляемостью сдвигу вдоль выбранной оси. Сведения о свойствах ударных волн при нестационарных условиях нагружения перечисленных нелинейных и разномодульных сред, зависимостях положения и скоростей движения волновых фронтов в каждый момент времени от характера воздействия помогают осуществить постановки соответствующих краевых задач. Поэтому вышеизложенное позволяет сделать вывод об актуальности выбранного направления исследований.

Целью работы является изучение условий существования и закономерностей распространения различных типов поверхностей разрывов деформаций в нелинейных упругих средах с неклассическими свойствами (нелинейная несжимаемость, неодинаковое сопротивление растяжению-сжатию и разнонаправленному сдвигу), необходимыми для постановки и получения обобщенных решений краевых задач динамики их деформирования.

К основным научным результатам диссертации относятся:

– сведения о типах и количестве сильных и слабых одномерных плоских и сферических волновых фронтов, распространяющихся при ударных воздействиях на несжимаемые нелинейно-упругие среды и материалы с объемной и сдвиговой разномодульностью;

– аналитические обобщенные решения нестационарных краевых задач ударного деформирования о движении одномерных плоских и сферических волн в несжимаемых нелинейно-упругих и сжимаемых кусочно-линейных средах.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, определяется новыми постановками краевых задач нелинейной динамической теории упругости несжимаемых и разномодульных сред за счет указания возможности возникновения в них нелинейных эффектов: плоских одномерных поверхностей сильных разрывов (ударных волн нагрузки и волн круговой поляризации), простых волн Римана, сферических одномерных ударных волн и сферических слоев постоянной плотности.

Достоверность полученных результатов обоснована применением общепринятых подходов механики деформирования, условий совместности разрывов теории особых движущихся поверхностей, сходимостью полученных результатов в предельном случае к известным соотношениям классической теории упругости.

Применение и практическая ценность работы. Изучение свойств поверхностей разрывов деформаций в нелинейных упругих средах с неклассическими свойствами (нелинейной несжимаемостью, неодинаковым сопротивлением растяжению и сжатию, разнонаправленным сдвигам) являются неотъемлемой частью решения нестационарных краевых задач ударного деформирования упругих сред, позволяет провести корректную постановку и разработать методику их решения. Кроме самостоятельного значения, полученные аналитические решения задач динамики материалов со сложными механическими свойствами могут служить в качестве тестовых при создании специальных численных методов решений обобщенных динамических задач и при отлаживании численных расчетных схем.

Апробация результатов диссертации.

Отдельные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

– Региональная научно-техническая конференция «Вологдинские чтения» (Владивосток, 2006);

– Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2010, 2012);

– Региональная научно-техническая конференция «Молодежь и научно-технический прогресс» (Владивосток, 2011, 2012);

– Международная школа-семинар «Современные проблемы механики и прикладной математики» (Воронеж, 2004);

– Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные вопросы

механики и процессов управления», посвященная 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова (Владивосток, 2011).

Диссертация в целом докладывалась на семинаре отдела механики деформируемого твердого тела ИАПУ ДВО РАН под руководством чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессора А.А. Буренина.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (152 наименования). Общий объем работы — 146 страниц, в том числе 45 рисунков, включенных в текст.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 17 печатных работ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение в работу содержит краткий обзор литературы, посвященной проблемам моделирования нелинейных нестационарных процессов деформирования упругих сред. Нелинейные эффекты при ударных нагружениях упругих тел изучались А.А. Бурениным, Г.И. Быковцевым, С.Н. Гавриловым, Д.Д. Ивлевым, А.Г. Куликовским, В.В. Лапыгиным, Э.В. Ленским, А.И. Лурье, В.А. Ляховским, В.П. Масловым, П.П. Мосоловым, В.В. Новожиловым, Л.А. Пекуровской, В. Прагером, В.Е. Рагозиной, Е.И. Свешниковой, Е.М. Черных, А.Д. Чернышовым, А.В. Чигаревым, А.П. Чугайновой, D. Bland и др. Большое внимание в обзоре уделено моделированию материалов, свойства которых не одинаковы при растяжении и сжатии. Существенный вклад в развитие данного подхода внесли отечественные ученые С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, А.А. Буренин, В.В. Дудукаленко, А.А. Золочевский, А.Г. Куликовский, Е.В. Ломакин, В.А. Ляховский, В.П. Маслов, Н.М. Матченко, В.А. Минаев, В.Н. Москаленко, П.П. Мосолов, В.П. Мясников, А.И. Олейников, В.М. Панферов, А.А. Пекуровская, Ю.Н. Работнов, Л.А. Толоконников, Г.Ф. Филатов, А.В. Чигарев, И.Ю. Цвелодуб, Т.Д. Шермергор, В.М. Ярушина и др. Решения автомодельных задач динамики нелинейно упругой среды исследовались такими отечественными учеными, как Е.И. Агапов, А.А. Буренин, О.В. Дудко, А.Г. Куликовский, В.В. Лапыгин, А.В. Резунов, Е.И. Свешникова, Е.М. Черных, А.В. Чернышов, А.П. Чугайнова.

На основе проведенного литературного обзора сформулированы цели и задачи диссертации. Здесь же приводится структура диссертации по главам.

В ***первой главе*** диссертации содержатся теоретические сведения, необходимые для моделирования процессов динамического деформирования в упругих телах. Система модельных соотношений, описывающая динамическое де-

формирование изотропной упругой среды, допускающей изменение объема, записана в § 1.1 в адиабатическом приближении:

$$
\begin{gathered}
\upsilon_i = \dot{u}_i + \upsilon_j u_{i,j}, \quad \omega_i = \dot{\upsilon}_i + \upsilon_j \upsilon_{i,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho\left(\dot{\upsilon}_i + \upsilon_j \upsilon_{i,j}\right), \\
\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right), \qquad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\
\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_1^3\right)^{1/2}, \\
I_1 = \alpha_{ii}, \qquad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \qquad I_3 = \alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

В соотношениях (1) u_i, υ_i – компоненты векторов перемещений и скорости перемещений точек среды; σ_{ij}, α_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши и тензора деформаций Альманси; W – функция состояния, определяющая механические свойства материала (упругий потенциал, в адиабатическом приближении для изотропной среды зависящий только от инвариантов тензора деформаций I_1, I_2, I_3); ρ, ρ_0 – плотность среды в текущем и недеформированном состоянии; δ_{ij} – символ Кронекера; частная производная по независимой пространственной переменной x_j обозначена латинским индексом после запятой ($u_{i,j}{=}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$), частная производная по времени – точкой ($\dot{u}_i{=}\frac{\partial u_i}{\partial t}$).

В § 1.2 приведены основные модельные соотношения нелинейно-упругих изотропных сред с различными механическими свойствами. Упругий потенциал для несжимаемой нелинейно-упругой среды $W = W(I_1, I_2)$ можно представить в виде разложения в ряд Маклорена относительно двух инвариантов I_1, I_2:

$$
W(I_1, I_2){=}(a{-}\mu)I_1{+}aI_2{+}bI_1^2{-}\eta I_1I_2{-}\theta I_1^3{+}cI_1^4{+}dI_2^2{+}\chi I_1^2I_2{+}\dots \tag{2}
$$

Третий инвариант I_3 может быть вычислен через I_1 ,I_2 из условия несжимаемости $\rho/\rho_0{=}1$. Постоянную μ здесь следует отождествлять с модулем сдвига упругой среды, другие постоянные $a, b, \zeta, \theta, \dots$ являются упругими модулями более высокого порядка. В формулу Мурнагана для несжимаемой упругой среды следует внести функцию добавочного гидростатического давления P:

$$
\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}). \tag{3}
$$

С целью моделирования эффекта разного сопротивления материалов растяжению и сжатию упругий потенциал изотропной среды выбирается в виде

$$
W = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1\sqrt{I_2} + \dots, \tag{4}
$$

предложенном В.П. Мясниковым и уточненном в дальнейшем А.И. Олейниковым. В (4) λ, μ – параметры Ламэ, ν – упругий модуль, который отражает наличие микродефектов в материале. В случае одноосного деформирования

($u_1(x_1,t)$=$u(x,t)$, u_2=u_3=0) разномодульной упругой среды с учетом принятого допущения о малости деформаций упругий потенциал (4) позволяет получить кусочно-линейную зависимость между напряжениями σ и деформациями e:

$$\sigma = \{\lambda + 2\mu - 2k\nu\}e, \qquad k = \mathrm{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } e > 0, \\ -1 & \text{при } e < 0, \end{cases} \tag{5}$$

которая приводит к одномерному уравнению движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Фазовая скорость c в уравнении (6) может принимать различные значения a=$\sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu + 2\nu)}$ или b=$\sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu - 2\nu)}$ в зависимости от характера деформирования.

В случае сферической симметрии упругий потенциал (4) существенно усложняет определяющие соотношения, т.к. учитывает взаимное влияние объемных и сдвиговых деформаций. С целью исключения такого явления дилатации используется другой вид упругого потенциала

$$\begin{gathered} W = \frac{\lambda}{2}J_1^2 + \mu J_2 - \nu J_1|J_1|, \\ J_1 = e_{kk}, \quad J_2 = e_{ik}e_{ki}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \end{gathered} \tag{7}$$

Одномерное уравнение движения в случае сферической симметрии может быть записано с учетом (7) в форме

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{u}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{8}$$

сохранившей волновой сферический оператор в левой части равенства, что не может быть достигнуто в рамках модели (4). Фазовая скорость $c = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu - 2\nu\mathrm{Sign}(J_1))}$ уравнения движения может принимать различные значения в зависимости от характера протекающего процесса деформирования, однако знак перед коэффициентом ν определяется знаком первого инварианта $J_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}$ в целом. Отсюда следует, что переход от состояния $J_1 > 0$ к состоянию $J_1 < 0$ (или наоборот) и возникновение сопровождающих такой переход специфических эффектов, присущих разномодульной среде, может достигаться при всевозможных соотношениях между значениями градиента $\partial u/\partial r$, перемещения u и радиуса r.

Разномодульные механические свойства несжимаемой изотропной упругой среды, по-разному реагирующей на разнонаправленные сдвиги, определены упругим потенциалом $W(L_1, L_2)$ (аналог потенциала Муни)

$$W = -\beta_1 L_1 + \beta_2^{\pm} L_2^2. \tag{9}$$

Первый упругий модуль β_1 остается постоянным, второй упругий модуль $\beta_2^{\pm}$ меняет скачком свое значение при изменении направления сдвиговой нагрузки вдоль выбранной оси. Инварианты L_1, L_2 определяются главными значениями тензора деформаций α_i и имеют одинаковую степень малости по деформациям: $L_1{=}1/3(\alpha_1{+}\alpha_2{+}\alpha_3)$, $L_2{=}\sqrt{3/2((\alpha_1{-}\alpha)^2{+}(\alpha_2{-}\alpha)^2{+}(\alpha_3{-}\alpha)^2)}$.

В случае одномерного движение точек среды($u_2(x_1,t){=}u(x,t)$, $u_1{=}u_3{=}0$), упругий потенциал (9) позволяет зависать уравнения движения

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{10}$$

где из первого равенства можно вычислить функцию добавочного гидростатического давления $P = \rho\tilde{P}$ при известном поле перемещений, а второе уравнение служит для определения поля перемещений и является первостепенным при решении краевых задач. Константы c_1 и c_2 в этом случае принимают значения $c_1{=}\sqrt{\rho^{-1}(\beta_1/3{+}\beta_2^{\pm})}$, $c_2{=}\sqrt{\rho^{-1}(\beta_1/3{+}3/2\beta_2^{\pm})}$, различные при противоположных направлениях сдвига.

На основе известных динамических, кинематических и геометрических условий совместности разрывов первого и второго порядка для ударных и слабых волн, приведенных в § 1.3, в следующих двух параграфах первой главы указаны условия возникновения и закономерности распространения поверхностей разрывов деформаций в частных случаях движения точек среды. В § 1.4 для случая одномерного деформирования показано, что в несжимаемой нелинейно-упругой среде возможно возникновение двух типов плоских одномерных ударных волн: сдвиговая ударная волна, которая может изменить только интенсивность предварительного сдвига без изменения его направленности, и ударная волна круговой поляризации, на которой скачкообразно меняется только ее направленность, а интенсивность предварительного сдвига остается неизменной. Скорость сдвиговой ударной волны всегда больше скорости ударной волны круговой поляризации. Разрыв добавочного гидростатического давления P возможен только на плоскополяризованной волне. На плоскости разрывов круговой поляризации скачок функции P невозможен.

В § 1.5 приведена классификация сильных и слабых плоских поверхностей разрывов в случае одноосного деформирования разномодульной среды Мясникова-Олейникова. Анализ обобщенных решений одномерного уравнения движения (6), подобный проведенному В.П. Масловым и П.П. Мосоловым, позволил выделить в разномодульной упругой среде в зависимости от значения первой производной перемещений $\partial u/\partial x$ следующие типы плоских одномерных волновых фронтов: *ударная волна*, распространяющаяся со скоростью $b{<}G_\alpha{<}a$ и скачком меняющая знак $\partial u/\partial x$ с положительного на отрицательный (обрат-

ный случай невозможен согласно термодинамическому условию совместности, запрещающему возникновение ударных волн расширения); *сигнотон* со скоростью G_γ, на котором происходит скачок $\partial u/\partial x$, но при этом производная сохраняет свой знак; *полусигнотон* со скоростью распространения G_β, с одной стороны от которого $\partial u/\partial x$=0, а с другой $\partial u/\partial x$<0 или $\partial u/\partial x$>0; *простой разрыв*, движущийся со скоростью G_δ и на котором первые производные перемещений непрерывны, а скачком изменяются вторые производные (волна ускорений). В зависимости от предварительного деформированного состояния и заданного граничного воздействия сигнотоны, полусигнотоны и простые разрывы могут быть медленными со скоростью b или быстрыми со скоростью a.

Обобщенные решения уравнений (10), записанных для одномерного движения точек несжимаемой кусочно-линейной среды (9), имеют аналогичный вид. Подобная классификация применима и к одномерным сферическим волнам в разномодульной упругой среде с потенциалом (7), с тем лишь отличием, что тип разрыва зависит не от значений первой производной перемещений, а от знака первого инварианта тензора деформаций $J_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}$ в целом.

Вторая глава посвящена постановкам и решению ряда автомодельных краевых задач динамики деформирования несжимаемой упругой среды. В § 2.1 рассмотрена автомодельная задача об ударе по деформированному упругому несжимаемому полупространству при наличии в нем предварительных деформаций в случае одномерного движения точек среды. Показано, что постоянная сжимающе-сдвигающая нагрузка $\sigma_{ij}(u_{2,1}, u_{3,1})$=const, приложенная в момент времени t=0 на границе полупространства, приводит к возникновению в нем двух плоских одномерных волновых фронтов. Первой из них может оказаться либо плоскополяризованная волна Римана (центрированная волна разгрузки, на которой происходит уменьшение предварительного сдвига), либо ударная волна (поперечная волна нагрузки, увеличивающая предварительный сдвиг). Вторым фронтом всегда является ударная волна круговой поляризации, изменяющая скачком направление предварительного сдвига. Функция добавочного гидростатического давления P в области центрированной волны меняется непрерывно от P_0 до P. На ударной волне круговой поляризации функция P непрерывна.

В § 2.2 рассматривается задача одномерного взаимодействия двух идущих навстречу друг другу в несжимаемом упругом слое толщины h плоских сдвиговых ударных волн, поляризованных в различных плоскостях. До начала воздействия слой находился в недеформированном состоянии, в начальный момент времени на границы слоя прикладывается постоянная сдвигающе-сжимающая ударная нагрузка σ^I, σ^{II} (рис. 1). В результате такого воздействия в слое навстречу друг другу начинают двигаться два плоских сдвиговых ударных фрон-

та Σ_1 и Σ_2 (рис. 1, a) со скоростями G_1 и G_2.

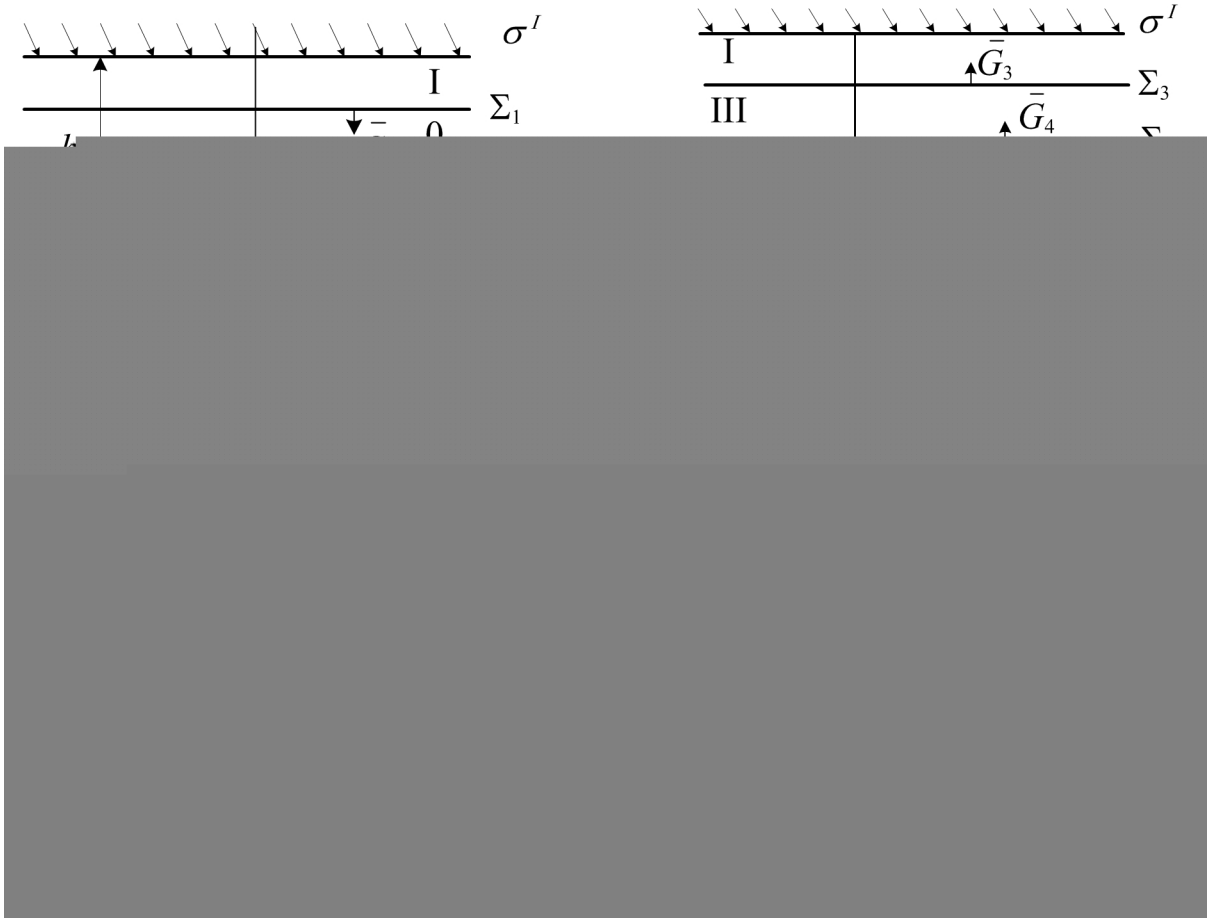

Рис. 1

Для определения характера волновой картины, возникающей после взаимодействия ударных волн нагрузки Σ_1, Σ_2, введено понятие *вектора сдвига* $\bar{s}=\{u_{2,1}, u_{3,1}\}$. Деформированное состояние среды за Σ_1 характеризуется вектором $\bar{s}_I$, за Σ_2 – вектором $\bar{s}_{II}$. После столкновения ударных волн Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны отражаются два пакета плоских одномерных волновых фронтов, каждый из которых содержит две волны (ударные или простые). Результирующее деформированное состояние между последними отраженными волнами $\bar{s}=\bar{s}_I+\bar{s}_{II}$. Тип отраженных волновых фронтов (ударная волна или простая волна Римана) зависит от соотношения модулей $|\bar{s}|$, $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$.

Если $|\bar{s}_I|\leqslant|\bar{s}_{II}|<|\bar{s}|$, то после взаимодействия Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны отражаются по две ударные волны (рис. 1, b). Передние отраженные фронты Σ_3 и Σ_5 являются ударными сдвиговыми волнами, увеличивающими предварительные сдвиги $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$ до значения $|\bar{s}|$, а на ударных волнах Σ_4 и Σ_6 происходит поворот увеличенных сдвигов так, чтобы их направленность совпала.

В случае $|\bar{s}_I|<|\bar{s}|<|\bar{s}_{II}|$ один отраженный пакет состоит из простой волны Римана с фронтами ξ_3^+ и ξ_3^- и ударной волны Σ_4, а второй – из двух ударных

фронтов Σ_5 и Σ_6. Простая волна уменьшает предварительный сдвиг, ударная волна нагрузки Σ_5 увеличивает предварительный сдвиг, а волны поворота Σ_4 и Σ_6 разворачивают поляризацию сдвиговых деформаций в одном направлении (рис. 1, c).

Соотношение $|\bar{s}_I|<|\bar{s}_{II}|<|\bar{s}|$ возможно, если угол α между плоскостями поляризации волн нагрузки Σ_1 и Σ_2 и отношение длин заданных векторов $|\bar{s}_I|$ и $|\bar{s}_{II}|$ удовлетворяют неравенству $|\bar{s}_{II}|/|\bar{s}_I| < -2\cos\alpha$, $\alpha \in [2\pi/3, \pi]$. Тогда решение состоит из двух волновых пакетов, в каждом из которых передним фронтом является простая волна Римана ($\xi_3 \in [\xi_3^+, \xi_3^-], \xi_5 \in [\xi_5^+, \xi_5^-]$), а задним – ударная волна поворота (Σ_4, Σ_6) (рис. 1, d).

В ***третьей главе*** получены аналитические решения ряда нестационарных краевых задач одноосного ударного деформирования упругой среды, поразному сопротивляющейся растяжению и сжатию (модель (5)).

Задача об одноосном деформировании упругого полупространства решена в двух постановках. В первой из них на границе задана функция движения точек граничной плоскости по закону $u(0,t)=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – гладкая, дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $\varphi(t)\leqslant 0$ при $t\geqslant 0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(t)<0$ при $0\leqslant t<t_1$, $\varphi'(t_1)=0$, $\varphi'(t)>0$ при $t>t_1$ (рис. 2, a). Такое воздействие в режиме «растяжение-сжатие» приводит к возникновению в момент времени $t=0$ медленного полусигнотона Σ_β – волны разрежения со скоростью b, а в момент смены направления нагрузки ($t = t_1$) от границы полупространства отделяется ударная волна Σ_α со скоростью G_α (рис. 2, b). Перед фронтом полусигнотона среда недеформирована, за фронтом до момента t_1 среда подвергается растяжению, а за ударной волной среда переходит в сжатое состояние. В частном случае, когда $\varphi(t)$ задана в виде квадратичной функции, скорость ударной волны постоянна и не зависит от времени.

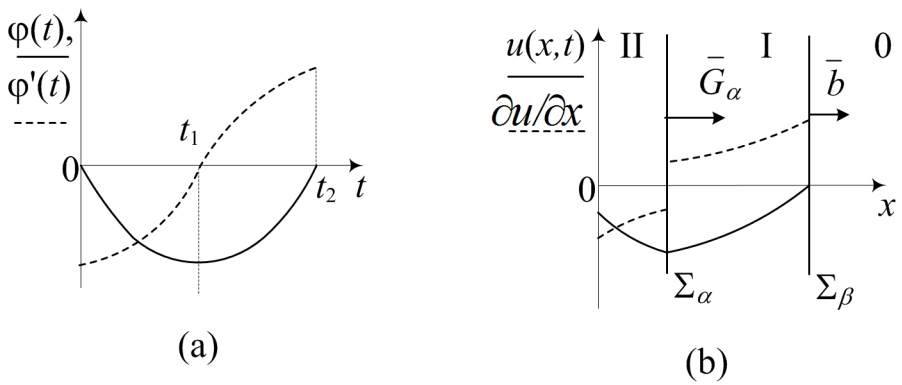

Рис. 2

Вторая постановка данной задачи рассматривает случай, когда полупространство сначала подвергается сжатию, а затем растяжению. Перемещения

точек граничной плоскости заданы функцией $\varphi(t)$: $\varphi(t)\geqslant 0$ при $t\geqslant 0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(t)>0$ при $0\leqslant t<t_1$ $\varphi'(t_1)=0$, $\varphi'(t) < 0$ при $t > t_1$ (рис. 3, a).

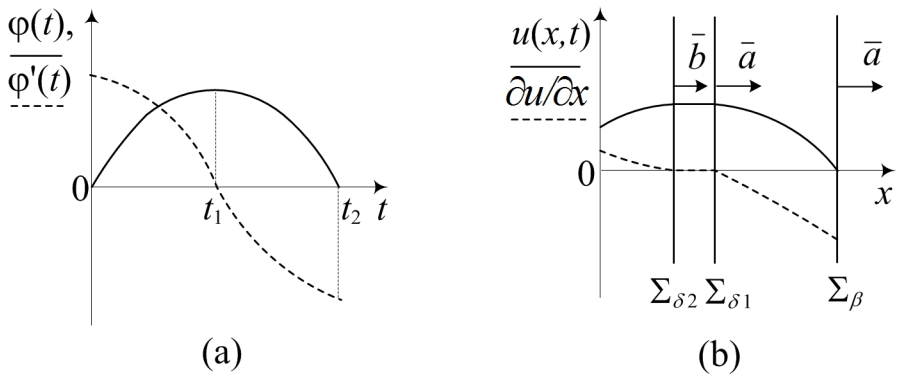

Рис. 3

При таком воздействии в момент времени $t = 0$ от границы полупространства отделяется быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ – волна сжатия, которая со скоростью a несет в недеформированное полупространство сжимающие граничные возмущения (рис. 3, b). В момент времени $t{=}t_1$ при смене направления нагрузки от границы отделяются два простых разрыва: быстрый $\Sigma_{\delta_1}(t)$ со скоростью a и медленный $\Sigma_{\delta_2}(t)$ со скоростью b (рис. 3, b). Между простыми волнами образуется слой постоянных перемещений, движущийся как жесткое целое. Ширина слоя увеличивается с течением времени за счет разницы скоростей его фронтов.

В задаче об отражении плоских одномерных волн от жестко закрепленной границы разномодульного упругого слоя получено, что выбор направления воздействия на нагружаемую границу (сжатие или растяжение) не влияет на качественный характер решения данной задачи: в момент времени $t = 0$ граничные возмущения начинают распространяться в слой посредством полусигнотона $\Sigma_\beta(t)$, а достигнув жестко закрепленной границы слоя, всегда отражаются сигнотоном $\Sigma_\gamma(t)$.

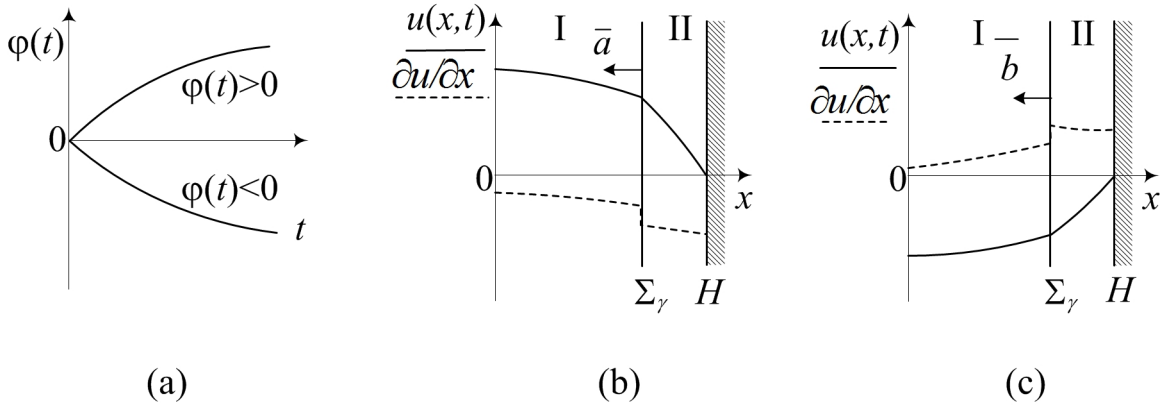

Рис. 4

Вид функции нагружения влияет только на скорости волновых фронтов (a при положительной монотонно возрастающей $\varphi(t)$ ($\varphi(t)>0$), b при отрицательной монотонно убывающей $\varphi(t)$ ($\varphi(t)<0$)).

Отказ от условия жесткого закрепления границы разномодульного слоя, на которую выходит плоская одномерная волна сжатия или разрежения, приводит к совершенно другому решению задачи. Оказалось, что вид отраженной волновой картины зависит от знака второй производной функции $\varphi(t)$ (т.е. ее выпуклости или вогнутости). Показано, что граничные возмущения могут приводить к возникновению движущегося слоя недеформированной среды, если $\varphi(t)$ положительная монотонно возрастающая *выпуклая* функция ($\varphi''(t)>0$, рис. 5, b). В случае отрицательной монотонно убывающей *вогнутой* функции $\varphi(t)$ ($\varphi''(t)>0$) от свободной границы отражается ударная волна (рис. 5, c). Два других варианта функции движения точек границы слоя при $\varphi''(t)<0$ здесь не представлены, т.к. решения качественно совпадают с решениями задачи с жестко закрепленной границей.

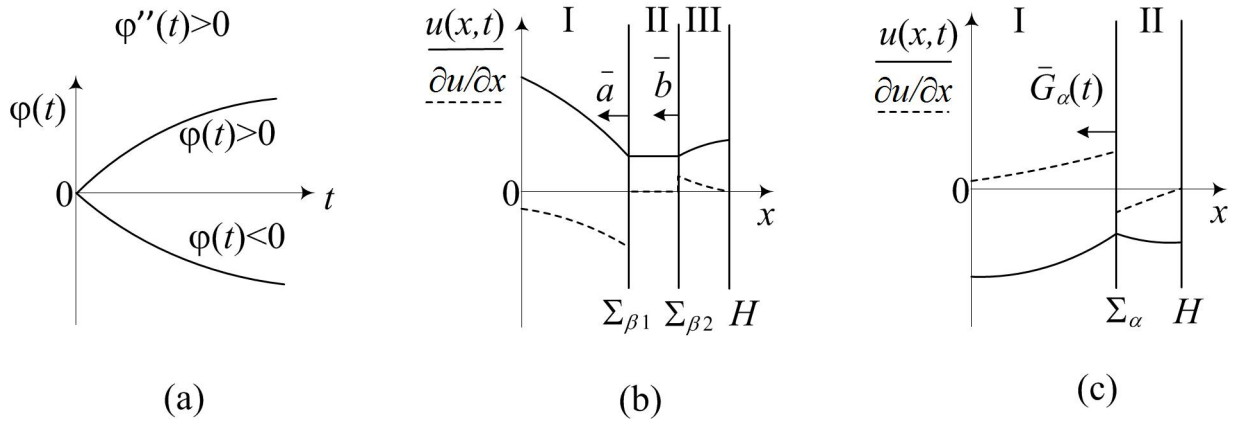

Рис. 5

В этой же главе в § 3.6 рассмотрены аналогичные краевые задачи ударного деформирования несжимаемой среды с разномодульным сопротивлением сдвигу вдоль выбранной оси в рамках модели (9).

Четвертая глава посвящена изучению особенностей построения решений краевых задач ударного деформирования разномодульного упругого материала в случае сферической симметрии. В задаче о нагружении поверхности сферы радиуса R функция перемещений $u(R,t)=\varphi(t)$ на границе задана отрицательной: $\varphi(t)\leqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant t_2$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(t)<0$ при $0\leqslant t<t_1$, $\varphi'(t_1)=0$, $\varphi'(t)>0$ при $t>t_1$ (рис. 6, a). Распространение граничных возмущений в среде происходит посредством сферической сходящейся волны – быстрого полусигнотона $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a (рис. 6, b). Перед полусигнотоном среда недеформирована, за ним происходит сжатие материала. В момент времени $t=t_1$ на сферической

границе происходит смена характера воздействия со сжимающего на растягивающее. При этом знак первого инварианта тензора деформаций J_1 все еще остается отрицательным, т.е. продолжается дальнейшее сжатие среды. Выход J_1 на нулевое значение происходит в момент времени $t_*>t_1$, когда от внешней границы сферы отделяются две слабых волны $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и $\Sigma_{\delta_2}(t)$. Между ними образуется сферический слой постоянной плотности ($\rho/\rho_0=1$), где $J_1=0$. Такая реакция разномодульной упругой среды в случае сферических волн названа *эффектом запаздывания.*

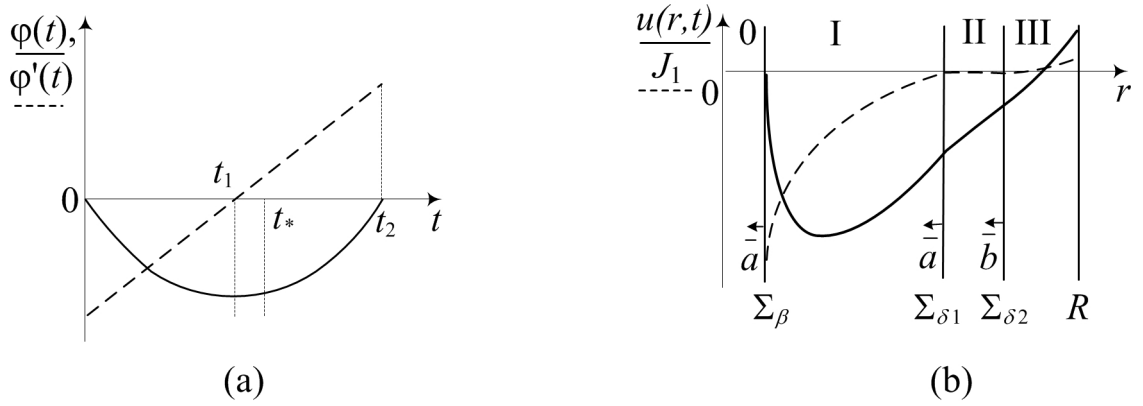

Рис. 6

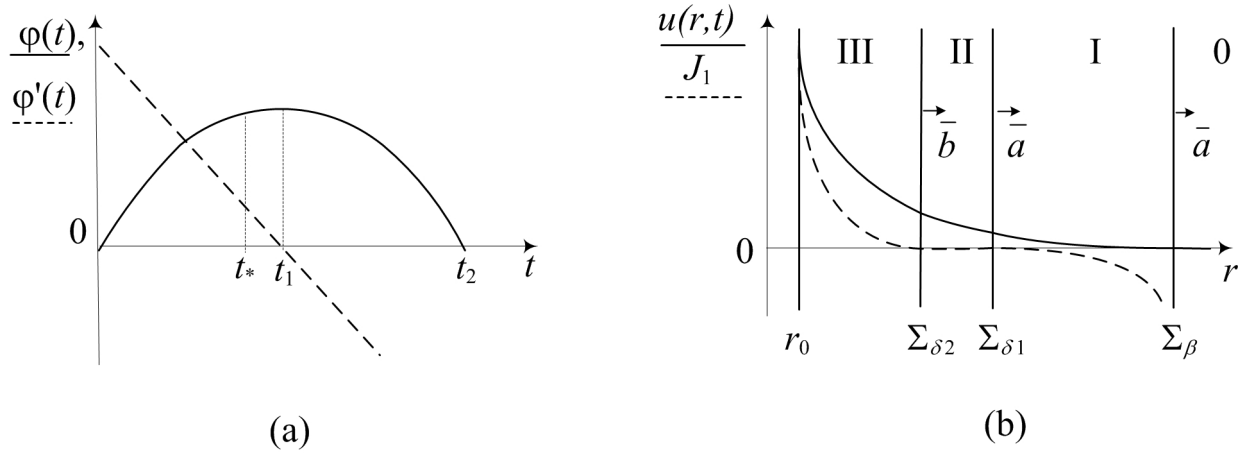

Рис. 7

Нагружение сферического отверстия радиусом r_0 в разномодульной среде по закону $u(r_0,t) = \varphi(t)$ (рис. 7, a) приводит к возникновению расходящихся одномерных сферических волн. В момент t=0 в материал уходит сферическая волна – быстрый полусигнотон $\Sigma_\beta(t)$ со скоростью a (рис. 7, b), за которым происходит сжатие среды. Согласно заданной функции перемещений точек границы r_0, смена знака инварианта J_1 происходит раньше $t_*<t_1$, чем меняется вид нагрузки на границе. Как и в задаче о возникновении сходящихся волн, в момент времени t_* от границы сферического отверстия отделяются два слабых

фронта: быстрый $\Sigma_{\delta_1}(t)$ и медленный $\Sigma_{\delta_2}(t)$, между которыми образуется сферический слой постоянной плотности.

В ***заключении*** приведены ***основные результаты диссертации***:

– исходя из законов сохранения, описывающих динамическое деформирование изотропной упругой среды в адиабатическом приближении, получены зависимости напряжений и деформаций для упругих сред с усложненными механическими свойствами (несжимаемая нелинейно-упругая среда, разномодульная среда Мясникова-Олейникова, разномодульная среда без эффекта дилатации, разномодульная среда с различным сопротивлением сдвигу вдоль выбранной оси);

– в рамках модели несжимаемой нелинейно-упругой среды получено аналитическое решение автомодельной задачи о взаимодействии двух идущих навстречу друг другу плоских сдвиговых ударных волн, поляризованных в различных плоскостях; показано, что при их отражении формируется две группы волновых фронтов - ударных и простых волн Римана; указаны критерии для определения на этапе постановки задачи типа возникающих волновых фронтов (ударный или слабый) исходя из начальных параметров задачи (интенсивности и направленности сдвигов на взаимодействующих волнах);

– в рамках математической модели разномодульной упругой среды Мясникова-Олейникова на основе введенной классификации обобщенных решений одномерного уравнения движения получены аналитические решения нестационарных краевых задач динамического одноосного деформирования разномодульной упругой среды: о возникновении ударной волны и области постоянных перемещений со слабыми волнами в качестве переднего и заднего фронтов при ударном нагружении границы упругого полупространства, об отражении плоской одномерной волны от жестко закрепленной границы разномодульного упругого слоя, об отражении плоских одномерных волн сжатия и разрежения от свободной границы разномодульного упругого слоя; указаны принципиальные отличия полученных решений от известных результатов аналогичных задач классической теории упругости;

– получено решение нестационарной краевой задачи об ударном сдвиге на границе полупространства в несжимаемой разномодульной среде, показана возможность возникновения в обобщенном решении уравнения движения ударных волн, областей недеформированного материала;

– в рамках математической модели разномодульной среды, свободной от эффекта дилатации (взаимного влияния объемных и сдвиговых деформаций при распространении граничных возмущений) получено решение нестационарных краевых задач о сходящихся и расходящихся одномерных сферических волнах; показана возможность возникновения сферического слоя постоянной плот-

ности при нагружении сферической границы по типу «растяжение-сжатие» и «сжатие-растяжение», при этом момент возникновения слоя в первом случае отстает от момента смены знака граничный нагрузки (эффект «запаздывания») и наоборот, опережает во втором случае.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. Владивосток: Дальнаука, 2005. Т. 6. № 1-2. С. 94-105.

2. Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2011. Т. 14. № 4(48). С. 14-23.

3. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 147-155.

4. Дудко О.В., Лаптева А.А. К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2013. Т. 16. № 1(53). С. 21-28.

5. Дудко О.В., Лаптева А.А., Чигарев А.В. К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 41-47.

Статьи и материалы конференций:

6. Дудко О.В., Лаптева А.А., Чигарев А.В. О моделировании разномодульных свойств упругой среды // Сборник статей по материалам международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий», 12-15 августа 2013 г., Чебоксары. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. Ч.1. С. 88-93.

7. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. Возникновение ударной волны в линейной упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики», 24-28 мая, 2004 г., Воронеж. Воронеж: ВГУ, 2004. Ч. 1, Т. 1 С. 200-202.

8. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. Задачи одномерного отражения ударных возмущений от свободной границы разномодульного упругого слоя // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сборник трудов международной школы-семинара. Часть I. 12-17 сентября, 2005, Воронеж. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005. С. 136-139.

9. Дудко О.В., Лаптева А.А. Особенности решения автомодельной задачи о распространении ударных возмущений в несжимаемой упругой среде // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов международной конференции Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2010. С. 141-143.

10. Дудко О.В., Лаптева А.А. Математическое моделирование разномодульных деформационных свойств твердого тела в рамках кусочно-линейной теории упругости // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар им. ак. Е.В. Золотова: сборник материалов [электронный ресурс], 4-10 сентября 2012 г., Владивосток. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 115-118.

11. Лаптева А.А., Негодина Л.С. О способах построения математической модели упругой среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Материалы региональной научно-практической конференции «Молодежь и научно-технический прогресс», апрель-июль 2011 г., Владивосток. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2011. Ч.1. С. 360-361.

12. Лаптева А.А., Дудко О.В. Взаимодействие плоских одномерных волн нагрузки в несжимаемой упругой среде // Сборник докладов Всероссийской научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», 11-17 сентября 2011 г., Владивосток. [электронный ресурс]. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 97-100.

13. Буренин А.А., Дудко О.В., Лаптева А.А. Взаимодействие плоской одномерной волны со свободной границей разномодульного упругого слоя // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический журнал. Минск, 2013. Вып. 28. С. 16-21.

14. Дудко О.В., Лаптева А.А. Особенности одномерного взаимодействия двух плоских разнополяризованных ударных волн в несжимаемой упругой среде // Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2011. С. 101-104.

15. Дудко О.В., Лаптева А.А. Отражение ударных возмущений от свободной границы несжимаемого упругого слоя с разномодульными сдвиговыми свойствами // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конференции, 27 августа-1сентября 2012, Самара.

Самара: СамГТУ, 2012. С. 123-124.

16. Дудко О.В., Лаптева А.А. Об отражении плоской одномерной волны нагрузки от свободной границы несжимаемого упругого слоя с разномодульным сопротивлением сдвигу // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, 22-31 мая 2013 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2013. С. 339-341.

17. Дудко О.В., Лаптева А.А. О распространении одномерных сферических волн в разномодульной упругой среде // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», 21-23 мая 2013 г., Самара. Самара: СамГТУ, 2013. Ч.1. С. 100-103.

Личный вклад автора. В работе [11] автор выступала руководителем научных исследований, соавтор участвовала в проверке определяющих соотношений модели. В работах [1-10, 12-17] автор участвовала в получении определяющих соотношений, постановке краевых задач, выполнила все необходимые вычисления. Соавторы этих работ участвовали в постановке задач и интерпретации полученных результатов.

Автореферат разрешен к печати диссертационным советом Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО “Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева” 15.04.14 г.

Подписано в печать 15.04.14. Формат 60X84/16.

Бумага писчая. Печать оперативная.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ. №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО “Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева” 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.