На правах рукописи

Буханько Анастасия Андреевна

Теория пластического течения в механике разрушения и её приложения

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Самара – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант:	Хромов Александр Игоревич заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Буренин Анатолий Александрович член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор ФГБУН «Институт машиноведения и металлургии» ДВО РАН
	Кургузов Владимир Дмитриевич доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики разрушения материалов и конструкций ФГБУН «Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева» СО РАН
	Радченко Владимир Павлович доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнёва»

Защита диссертации состоится 16 сентября 2015 года в 14:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева» по адресу: 428000, Чувашская Республика, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38, ауд. 406.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева» (www.chgpu.edu.ru).

Автореферат разослан «____» _____ 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент С. В. Тихонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Одной из основных задач механики деформируемого твёрдого тела является создание фундаментальных основ для описания процессов разрушения твёрдых тел при их деформировании, то есть разработка основ механики разрушения (построение моделей и алгоритмов расчёта конструкций и технологических процессов при больших пластических деформациях с учётом разрушения). Теория пластического течения, как один из важных разделов механики деформируемого твёрдого тела, позволяет описывать поведение реальных материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования. В частности, теория пластичности позволяет решать геометрически нелинейные задачи, учитывающие изменение конфигурации частиц тела в пространстве, то есть учитывать изменения геометрии деформируемого тела; использовать в качестве меры деформаций тензоры конечных деформаций; получать аналитические решения различных задач.

Развитие фундаментальных соотношений теории пластического течения и пластических аспектов механики разрушения связано с именами Ю. Н. Работнова, А. Надаи, Р. Хилла, Л. М. Качанова, А. Ю. Ишлинского, Д. Д. Ивлева, В. В. Соколовского, Г. И. Быковцева, А. И. Хромова, Ю. Н. Радаева, Р. И. Непершина, Ю. В. Немировского, Б. Д. Аннина, Г. П. Черепанова, С. И. Сенашова, Дж. Райса, Ф. Макклинтока, Дж. Ф. Нотта, Д. Броека, Е. М. Морозова, Ю. Г. Матвиенко, Н. Ф. Морозова и других известных учёных.

Состояние развития механики разрушения определяется использованием в качестве теоретической базы деформационной теории пластичности, в которой, как правило, не учитывается процесс разгрузки материала, что сводит используемую теорию к нелинейной теории упругости. Решение конкретных задач о разрушении связано с использованием в качестве меры деформаций тензора малых деформаций. Этот подход приводит к ряду физических противоречий, в частности, к неограниченному росту напряжений и накопленной диссипации энергии в окрестности вершины трещины. Необходимо отметить, что с физической точки зрения разрушается не область, а некоторая совокупность частиц в окрестности вершины трещины, то есть разрушение связывается с нарушением сплошности среды, когда две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние[1]. Этот процесс можно связать с деформацией сплошной среды на разрывах поля скоростей перемещений. Такая возможность отсутствует в деформационной теории пластичности. Кроме того, известно, что при разрушении в окрестности вершины трещины практически во всех материалах экспериментально наблюдается наличие пластической области (хотя и достаточно малых размеров).

Известно, что разрушение представляет собой сложный, многоступенчатый процесс, который начинается задолго до появления видимых трещин. Разрушение возможно в результате развития содержащихся в теле реальных дефектов, и при оценке прочности необходимо учитывать имеющиеся в теле трещины, а следовательно, необходимо изучение влияния первоначальной обработки материала

[1] Под частицей понимается некоторый элементарный объём материала.

на его трещиностойкость (упрочнение/разупрочнение материала при выглаживании, прокатке, обработке давлением и т.п.). Согласно Е. М. Морозову теория распространения трещин в пластических материалах должна включать в себя по крайней мере два элемента: решение упругопластической задачи с учётом конечности пластической деформации и с удовлетворением граничных условий на упругопластической границе; нахождение условия образования макротрещины в материале, который претерпел значительную деформацию.

Основным направлением исследований в механике разрушения являются процессы распространения трещин. Это направление подробно разработано и включает линейную и квазилинейную механику разрушения (теория Гриффитса и теория, учитывающая поправку Ирвина на пластические деформации), и нелинейные процессы распространения трещин (критерий раскрытия трещины, инвариантный интеграл Черепанова-Райса), которые изложены в большом количестве работ. Если размеры пластической области велики (области, где нарушаются соотношения линейной механики разрушения), то может использоваться нелинейная модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для плоского напряжённого состояния (пластическая зона вырождается в отрезок, продолжающим трещину) или инвариантый J-интеграл.

Вместе с тем вопрос описания закономерностей и периода зарождения трещин в окрестности концентраторов напряжений остаётся в основном открытым. Исключение представляет гипотеза С. В. Серенсена о том, что зарождение трещины связано с исчерпанием состояния пластичности, которое в дальнейшем будем называть предельным состоянием материала. То есть считается, что при достижении предельного состояния пластическое течение возможно лишь при нарушении сплошности материала. Как правило, изучение предельных состояний материала связано с теорией прочности.

Проблема достижения материалом предельного состояния в настоящее время рассматривается, как правило, эмпирически. Экспериментальные подходы определения предельных состояний связаны с исследованиями в рамках теории малоцикловой усталости при разрушении материалов, зависящих от их пластических свойств и мало от упругих констант. В работах С. Фелтнера, Дж. Морроу и Д. Мартина вводится критериальная величина разрушения — удельная работа внутренних сил, связанная с упрочнением материала. Обоснованность выбора удельной работы внутренних сил в качестве критериальной величины связана с зависимостью диссипации энергии от истории деформирования материала. Отметим, что деформации не могут быть выбраны в качестве критериальной величины для описания процессов разрушения, поскольку могут обращаться в нуль, тогда как диссипация энергии может только накапливаться при деформировании.

Для устранения указанных недостатков в работе предлагается взгляд на механику разрушения с точки зрения теории пластического течения. Обоснованность использования теории пластического течения для описания процессов разрушения подтверждается основными соотношениями теории малоцикловой усталости и механики распространения трещин. Теория пластичности позволяет дать ясное описание процесса разрушения — процесс нарушения сплошности среды, который предполагается необратимым. Этот подход приводит к единой критериальной ве-

личине, определяющей момент зарождения трещины и условия её распространения.

В работе процесс разрушения предлагается рассматривать в два этапа: доведение материала до предельного состояния (когда деформирование невозможно без разрушения) и дальнейшее развитие течения (распространения трещины). Первый процесс связывается с накоплением необратимых повреждений, определяемых деформированием материала. Этот необратимый процесс связывается теорией пластического течения с необратимым термодинамическим процессом рассеивания работы внутренних сил на пластических деформациях, который определяется ассоциированным законом пластического течения. Экспериментальной основой здесь является теоретическая трактовка поведения материала при малоцикловой усталости, которое в основном зависит от пластических свойств материала и мало от упругих. Второй процесс — распространение макротрещины, также описывается теорией пластического течения, как течение на разрывах поля скоростей перемещений. Для чего необходимо допустить существование таких разрывов. Это накладывает определённые ограничения на модель теории пластического течения (в частности, она должна приводить к уравнениям гиперболического, а не эллиптического типа).

Основные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проектов № 01-01-00717-а «Влияние электротермического воздействия на процесс локализации пластических деформаций и разрушение материалов», № 04-01-00102-а «Концентраторы деформаций», № 08-08-99042-р_офи «Определение деформационных характеристик разрушения конструкционных материалов при малоцикловых пластических деформациях», № 11-08-00580-а «Пластические критерии разрушения», № 12-01-31283-мол_а «Поля деформаций и условия разрушения в окрестности вершины осесимметричной трещины для пластических тел»; и неоднократно поддерживались фондом для представления на научных мероприятиях, проводимых в России и за рубежом: проекты №№ 04-01-10654-з,05-01-10561-з, 06-01-10595-з, 07-08-08117-з, 08-08-09206-моб_з,09-08-09280-моб_з, 09-08-16025-моб_з_рос, 10-08-09370-моб_з, 11-08-16060-моб_з_рос, 12-08-09267-моб_з; а также при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проекта № 2.1.1/14141 «Теоретические и экспериментальные исследования влияния диссипативных процессов на механические характеристики и разрушение материалов». Во всех проектах автор принимала участие в качестве руководителя или ответственного исполнителя.

Целью диссертационной работы является описание процессов зарождения и распространения трещин на основе теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела.

Основными задачами работы являются:

1. Формулировка задач, моделирующих процессы деформирования и разрушения материала в рамках теории пластического течения на основе модели жёсткопластического тела.

2. Определение критериальной величины, характеризующей процессы доведения материала до предельного состояния и распространения трещины.

3. Установление связи выбранной критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения.

4. Формулировка подхода к описанию предельного состояния упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела.

5. Определение поверхности нагружения и условия пластичности, сохраняющих гиперболичность определяющих соотношений теории пластического течения.

Научная новизна состоит в описании процессов достижения материалом предельного состояния с позиций теории пластического течения в рамках модели упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, и понимании предельного состояния, как состояния предельного упрочнения (исчерпание пластичности материала).

Процесс распространения трещины рассматривается в рамках теории идеального жёсткопластического тела, что является новой областью приложения модели идеального жёсткопластического тела.

В рамках предлагаемого исследования поверхность нагружения и условие пластичности определяются соотношениями, содержащими второй и третий инварианты девиатора напряжения, что приводит к нарушению условия пропорциональности компонент тензора скорости деформации и девиатора напряжения; изменяется формулировка энергетического условия развития пластического течения для упрочняющегося тела. Добавление энергетического условия к системе уравнений в напряжениях приводит к новым постановкам задач теории пластического течения.

В работе за меру деформаций выбирается тензор конечных деформаций и рассматривается траектория движения частиц, что позволяет аналитически получить распределение полей деформаций и удельной работы внутренних сил (выбранную за единую критериальную величину), и исключить особенность (сингулярность) удельной диссипации энергии, в частности, в окрестности вершины трещины.

Теоретическая и практическая значимость.

Предлагаемый в исследовании подход позволяет описать процесс разрушения как совокупность процессов достижения материалом предельного состояния и распространения трещины с единых позиций, даёт новые методы расчёта модельных и прикладных задач теории пластического течения и механики разрушения.

Прикладное направление связано с приложением теории пластического течения к задачам технологической и эксплуатационной наследственности, которая определяется деформированием материала.

Методология и методы исследования. Задачи исследования решаются на основе деформационно-энергетического подхода к описанию процессов разрушения, сформулированного в рамках теории пластического течения, теории малоцикловой усталости и механики разрушения. С помощью методов, основанных на соотношениях теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела, получены аналитические решения задач о локализации пластических деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Методы аналитического расчёта распределения деформаций и удельной

диссипации энергии в задачах, моделирующих процессы деформирования и разрушения материала.

2. Поверхность нагружения и условие пластичности, связанные с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела, сохраняющие гиперболичность определяющих соотношений теории пластического течения.

3. Критерии разрушения материала: доведения до предельного состояния (зарождение трещины) и образования новых свободных поверхностей (распространение трещины). В качестве критериальной величины выбрана удельная работа внутренних сил, что обосновывается её связью с термодинамической необратимостью процесса разрушения.

4. Подход к описанию предельных состояний пластических тел в пространстве главных напряжений, позволяющий учитывать эффект Баушингера и конечность деформаций материала, и обобщающий соотношения малоцикловой усталости на произвольные пространственные процессы деформирования.

5. Связь новой критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций подтверждается адекватностью модельных математических представлений реальному поведению материала при его деформировании и разрушении; корректностью использования математического аппарата, законов механики деформируемого твёрдого тела, соотношений теории малоцикловой усталости и механики разрушения; частичной проверкой прогнозируемых аналитически решений с известными экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях и семинарах, а также за рубежом, в том числе на Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006, 2011); Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2006, 2008–2011, 2013); ICF Interquadrennial Conference. Fracture Mechanics in Design of Fracture Resistant Materials and Structures (Москва, 2007); Всероссийской и международной конференциях «Успехи механики сплошных сред», приуроченных к юбилею академика В. А. Левина (Владивосток, 2009, 2014); международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённой 80-летию Д. Д. Ивлева (Воронеж, 2010); Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвящённой 75-летию со дня рождения академика В. П. Мясникова (Владивосток, 2011); Третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2012); международной конференции «Живучесть и конструкционное материаловедение» (Москва, 2012); Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвящённой 75-летию со дня рождения д-ра физ.-мат. наук, профессора Г. И. Быковцева (Самара, 2013); международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и ин-

формационных технологий» (Чебоксары, 2013); XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Аделаида, Австралия, 2008); 7th European Solid Mechanics Conference (Лиссабон, Португалия, 2009); 8th European Solid Mechanics Confe-rence (Грац, Австрия, 2012) и другие.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 54 научных работах, из них 18 работ в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, автор участвовала в постановке задач и их решении, как основной исполнитель.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём диссертации — 209 страниц. Работа содержит 50 рисунков, 1 таблицу и список использованных источников из 210 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы и показана степень её разработанности, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показаны теоретическая и практическая значимости полученных результатов, описаны методология и методы исследования, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** представлены используемые в работе основные положения теории пластического течения в рамках модели жёсткопластического тела: материал изначально и в процессе деформирования изотропный и однородный; пластическое деформирование не зависит от гидростатического давления; упругие деформации малы по сравнению с пластическими, и не учитываются; в пластической области выполняется условие несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0; \tag{1}$$

справедлив ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_{ij} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}; \tag{2}$$

поверхность текучести, определяемая функцией $f(\sigma_{ij})$, является выпуклой; мощность диссипации работы внутренних сил на пластических деформациях определяется соотношением

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \lambda' \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{3}$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; σ_{ij} — компоненты тензора напряжения; f — функция, определяющая закон пластичности; λ' — некоторый положительный скалярный множитель, определяемый в каждой точке пути деформирования условием пластичности или упрочнения.

В *первом разделе* приведены основные соотношения, выполняющиеся вдоль характеристических линий, в условиях плоской и осесимметричной деформаций, позволяющие проводить расчёт полей напряжения и скорости перемещения с учётом изменения геометрии тел при конечных деформациях и движении особенностей поля скоростей перемещений.

Второй и *третий разделы* посвящены методам аналитического определения распределения удельной работы внутренних сил (диссипации энергии) и деформации в пластической области и в окрестности особенностей поля линий скольжения (на линиях разрыва поля скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения) в условиях плоской и осесимметричной деформации. Необходимость анализа распределения диссипации энергии и деформации в указанных областях возникает при изучении процессов деформирования и разрушения материала. В качестве основной величины, характеризующей распределение деформации, выбран тензор конечных деформаций Альманси $\mathbf{E} = [E_{ij}]$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) \quad \text{или} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - x^0_{k,i}x^0_{k,j}\right),$$

где $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ — единичный тензор, δ_{ij} — дельта Кронекера; x^0_i, x_i — лагранжевы и эйлеровы координаты частицы; $\mathbf{A} = [A_{ij}] = [x^0_{i,j}]^T = [x^0_{j,i}]$ — тензор дисторсии. В частности, показано, что в однородном поле тензора скорости деформации при одноосном растяжении образца главные значения тензора Альманси определяются следующими соотношениями:
в условиях плоской деформации

$$E_1 = \frac{\delta(2+\delta)}{2(1+\delta)^2}, \quad E_2 = -\frac{\delta(2+\delta)}{2}, \quad E_3 = 0; \tag{4}$$

и при осесимметричном деформировании

$$E_1 = \frac{\delta(2+\delta)}{2(1+\delta)^2}, \quad E_2 = E_3 = -\frac{1}{2}\delta; \tag{5}$$

где δ — относительное удлинение плоского или цилиндрического образца при растяжении, определяемое экспериментально. При определении поля деформаций на линиях разрыва поля скоростей перемещений в условиях плоской деформации учитывается состояние частицы: до пересечения линии разрыва частица была недеформирована или деформирована, и частица дважды пересекает линию разрыва. Определение поля деформаций в окрестности центра веера линий скольжения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений в компонентах тензоров конечных деформаций Альманси $\mathbf{E}$ или дисторсии $\mathbf{A}$.

В *четвёртом разделе* представлены критерии выбора предпочтительного пластического течения в случае неединственности поля скоростей перемещений и, как следствие, распределения деформаций в пластической области. В основу критериев заложены значения деформации (E_1) и диссипации энергии (W):
Пластическое течение развивается таким образом, что максимальное значе-

ние деформации (диссипации энергии) в пластической области минимально:

$$\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} E_1 \quad \left(\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} W \right), \tag{6}$$

где Ω — возможные (локальные) зоны пластической области; $d\Omega$ — возможные изменения пластической области при определённом пластическом течении, характеризуемые движением особенностей поля линий скольжения в данный момент.

Во **второй главе** рассмотрены задачи, позволяющие моделировать процессы деформирования и разрушения при неустановившемся и установившемся пластическом течении: внедрение клина в жёсткопластическую полуплоскость; раздавливание острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом; растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами. Полученные в работе распределения конечных деформаций и анализ их значений является существенным дополнением к известным решениям этих задач. На основе сравнения скоростей перемещений частиц в пластической области и распределения деформаций сделаны выводы о возможности рассмотрения предлагаемых в задачах пластических течений с разрушением и без него. Отмечены наиболее «опасные» зоны для разрушения материала. В случае неединственности пластического течения осуществлён выбор предпочтительного решения на основе критерия (6).

В *первом разделе* для задачи о внедрении клина в жёсткопластическую полуплоскость показано, что до значения $\mu \approx 31,7^\circ$ наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера линий скольжения, при $\mu > 31,7^\circ$ наибольшие деформации на линии разрыва $BDEC$ поля скоростей перемещений, рисунок 1. При этом учитывается, что в веер попадает частица, первоначально деформированная на участке EC линии разрыва.

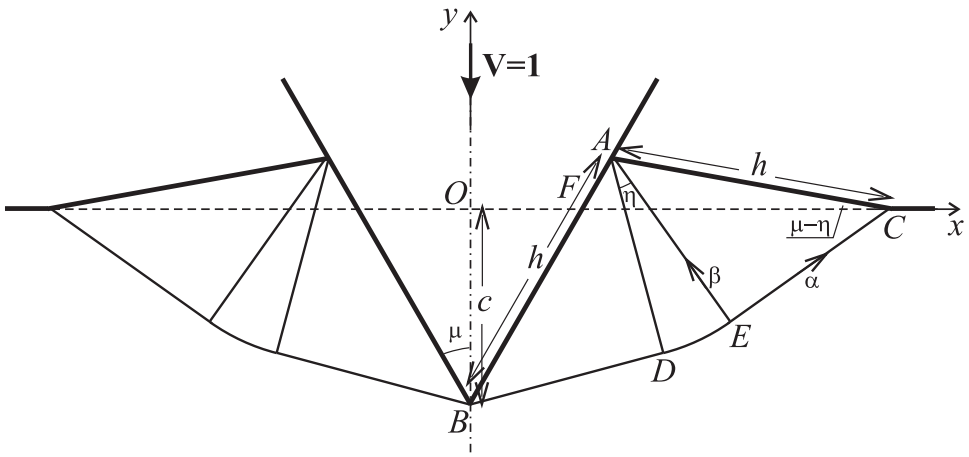

Рисунок 1 — Пластическое течение при внедрении клина в жёсткопластическую полуплоскость

Во *втором разделе* представлены возможные схемы пластического течения в задачах о раздавливании острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом[2]: решения, обладающие симметрией — решения Хилла и Прандтля; и решение с несимметричным пластическим течением. При этом в задаче об остром клине

[2] Ввиду достаточно большого объёма, занимаемого рисунками, схемы пластических течений в автореферате не приводятся.

решения являются автомодельными и имеют место для углов раствора клина: $\mu > 26,6^\circ$ в решении Хилла; $\mu > 14,04^\circ$ в решении Прандтля; $\mu > 22,5^\circ$ при несимметричном течении. Наибольшие деформации наблюдаются:

– для решения Хилла при $\mu \in [26,6^\circ; 44^\circ)$ — в окрестности центра веера линий скольжения; при $\mu > 44^\circ$ — на линии разрыва;

– для решения Прандтля при $\mu \in [14,04^\circ; 66,3^\circ)$ — в окрестности центра веера линий скольжения; при $\mu > 66,3^\circ$ — на линии разрыва;

– для несимметричного решения при $\mu \in [22,5^\circ; 53,3^\circ)$ — в окрестности центра веера линий скольжения; при $\mu > 53,3^\circ$ — на линии разрыва.

Указанные решения обобщены на случай раздавливания усечённого клина гладким плоским штампом. При этом пластические течения не являются геометрически подобными. Показано, что в этом случае пластическое течение начинается от поверхности конечного размера, из чего следует, что до определённого момента t в центрированный веер попадают первоначально недеформированные частицы[3] .

Для всех схем пластического течения в задачах о раздавливании острого и усечённого клиньев гладким плоским штампом определены координаты точек и уравнения линий, характеризующих геометрию пластической области, позволяющие получить аналитическое распределение деформации и диссипации энергии в окрестности особенностей поля линий скольжения. Сравнение наибольших значений деформаций, показывает, что в обоих случаях решение Прандтля является предпочтительным согласно критерию (6).

Третий раздел главы посвящён задаче об одноосном растяжении полосы, ослабленной симметричными V-образными вырезами. На основе сравнения скоростей частиц в пластической области, примыкающих достаточно близко к вершине выреза, показано, что известные решения этой задачи, предложенные Е. Ли (с сохранением геометрии выреза) и О. Ричмондом (с вращением свободной поверхности), содержат определённые противоречия, и позволяют описывать пластическое течение без разрушения только в момент $t = 0$, и при $t > 0$ течения возможны только с разрушением материала в окрестности вершины углового выреза.

Решение с несимметричным пластическим течением является полным в каждый момент времени и позволяет описывать процесс растяжение полосы с вырезами как с разрушением, так и без него. Предполагается, что в пластическом состоянии находится только верхняя (или нижняя) полуплоскость полосы, рисунок 2. Рассмотрены возможные случаи образования свободных поверхностей в процессе деформирования с учётом сохранения геометрии пластической области. Анализ распределения деформаций в окрестности вершины выреза (точка A) согласно (6), показывает, что минимальные деформации достигаются, когда вновь образующийся элемент свободной поверхности является продолжением её недеформированной без излома. На рисунке 3 положение вновь образующейся части свободной поверхности определяется углом η_1, и условие минимальности деформаций достигается при $\eta_1 = \eta$. Расчёты показывают, что при уменьшении η точка A^* приближается к точке N' и при $\eta = 52,362^\circ$ совмещается с ней. При этом

[3] Под переменной t понимается монотонно возрастающий параметр, характеризующий изменение (развитие) пластического течения.

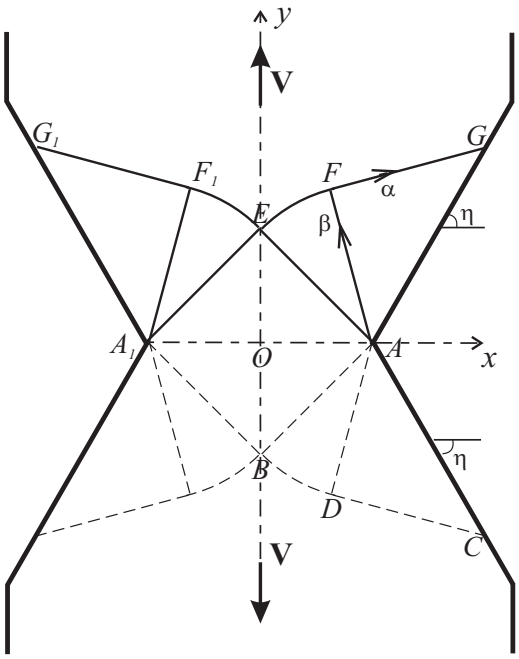

Рисунок 2 — Несимметричное пластическое течение при растяжении полосы с V-образными вырезами

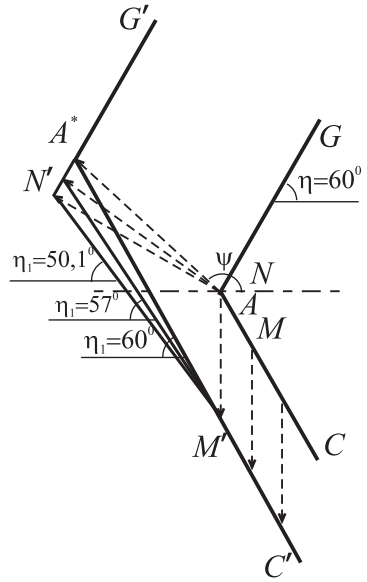

Рисунок 3 — Возможные положения новой деформированной поверхности ($\eta = 60°$)

$\sup\limits_{\varphi} E_1 \to 0,5$. Из чего следует, что при $\eta \leq 52,362°$ пластическое течение полосы возможно лишь при разрушении материала в окрестности вершины выреза, то есть возможно «превращение» выреза в трещину.

Отмечено, что при растяжении полосы в процессе несимметричного пластического течения частицы материала в окрестности точки A перемещаются из области AFG в нижнюю часть полосы за жёсткопластическую границу AE, являющейся линией разрыва поля скоростей перемещений. Поэтому процесс накопления диссипации состоит из двух этапов: первый — деформирование в веере EAF, второй — на линии разрыва скоростей AE.

На основе несимметричного течения может быть предложено решение, когда в пластическом состоянии находятся попеременно обе полуплоскости полосы — так называемое симметричное течение, при этом в процессе деформирования V-образный вырез сохраняет свою симметрию относительно первоначального положения свободной поверхности при условии $\eta_1 = \eta$. Если допустить, что в момент $t \in [0, \triangle t_1]$ вектор $\mathbf{m}$, определяющий направление движения угловой точки, был направлен в верхнюю полуплоскость полосы, то в следующий момент $t \in [\triangle t_1, \triangle t_2]$ пластическая зона может располагаться в нижней полуплоскости полосы, и вектор $\mathbf{m}$ будет направлен вниз. В этом случае движение точки A будет зигзагообразным, и первоначальная геометрия V-образного выреза также сохраняется.

В *четвёртом разделе* представлена полная схема деформирования и разрушения плоского образца, на основе которой процесс разрушения материала предлагается рассматривать состоящим из двух этапов. На первом этапе происходит однородное деформирование образца; при достижении критического значения диссипации энергии W_{**}, которая вложена в каждую частицу, происходит зарождение конечной макротрещины (рисунок 4,(а)). На втором этапе реализуется решение с

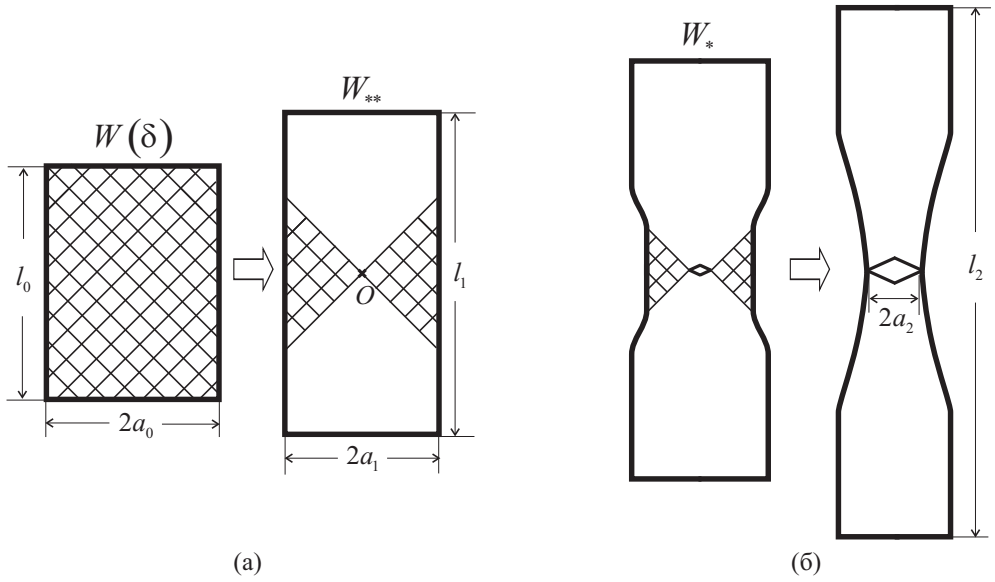

Рисунок 4 — Схема деформирования и разрушения плоского образца:
I этап (а) — доведение материала до предельного состояния (зарождение трещины, W_{**});
II этап (б) — образование новых свободных поверхностей (распространение трещины. W_*)

разрывным полем скоростей перемещения (рисунок 4,(б)); для дальнейшего развития трещины (вплоть до разделения образца на две части) необходимо добавить энергию величиной W_*.

Критерии разрушения материала: доведения до предельного состояния (зарождение трещины) и образования новых свободных поверхностей (распространение трещины), сформулированы следующим образом:

Критерий зарождения трещины: *Зарождение трещины происходит, когда работа внутренних сил на пластических деформациях достигает критической величины*

$$W = W_{**},$$

где W_{**} — удельная работа внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала.

Критерий распространения трещины: *Распространение трещины происходит, когда работа внутренних сил на пластических деформациях достигает критической величины*

$$W = W_*.$$

Здесь W_* — удельная работа внутренних сил, которую необходимо «добавить» в материал для распространения трещины.

Выбор удельной работы внутренних сил в качестве критериальной величины обосновывается её связью с термодинамической необратимостью процесса разрушения. В работе предложено процесс зарождения трещины описывать на основе модели упрочняющегося жёсткопластического тела; процесс распространения трещины — на основе модели идеального жёсткопластического тела.

В *пятом разделе* сделан вывод о том, что в теории пластического течения заложена модель разрушения, учитывающая изменение тензоров конечных деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения (на линиях разрыва поля скоростей перемещений, в окрестности центра веера линий скольжения).

Исследование поведения частиц материала и распределения деформаций в пластических областях позволяет предположить возможное поведение материала в окрестности пересечения особенностей поля линий скольжения, прогнозируя тем самым зоны, «опасные» для разрушения. Положение таких зон связано с точками пластической области, где нарушается условие непрерывности отображения конфигурации частиц в пластической области, когда две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние. Пересечение особенностей может наблюдаться как в окрестности свободной поверхности, так и внутри пластической области, рисунок 5. На основе предложенных схем для всех пластических течений в рассматриваемых во второй главе задач выделены зоны, прогнозируемые для разрушения материала в окрестности пересечения/совпадения особенностей поля скоростей перемещений.

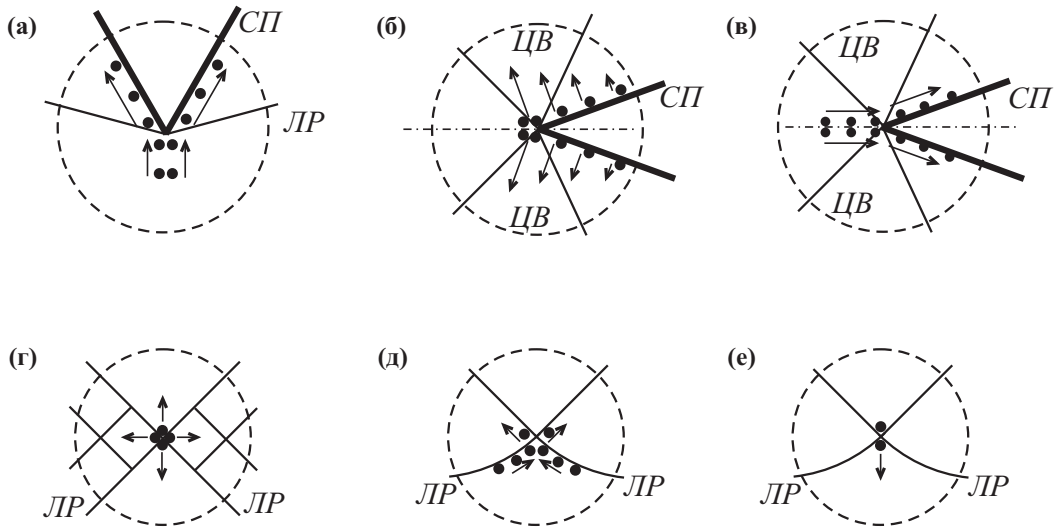

Рисунок 5 — Схемы поведения частиц материала в окрестности пересечения особенностей поля линий скольжения: (а)–(в) — в окрестности свободной поверхности (СП); (г)–(е) — внутри пластической области; (а), (г)–(е) — пересечение линий разрыва (ЛР) поля скоростей перемещений; (б), (в) — совпадение в одной точке двух центров вееров (ЦВ) линий скольжения

В **третьей главе** определяются поверхность нагружения, условие пластичности и энергетическое условие развития пластического течения, позволяющие учитывать различия пределов текучести материала при растяжении и сжатии, и сохраняющие гиперболичность определяющих соотношений теории пластического течения.

В *первом разделе* рассматривается поверхность Σ деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, представляющая собой в пространстве главных значений тензора конечных деформаций Альманси гиперболическую поверхность третьего порядка, рисунок 6,(а). Математически уравнение этой поверхности определяется условием несжимаемости жёсткопластического тела. Все деформационные процессы описываются линиями L на этой поверхности или их проекциями l на девиаторной плоскости, вид которых зависит от истории нагружения. В сечениях плоскостями, параллельными девиаторной плоскости, проекции поверхности Σ, называемые в работе линиями уровня, имеют вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии

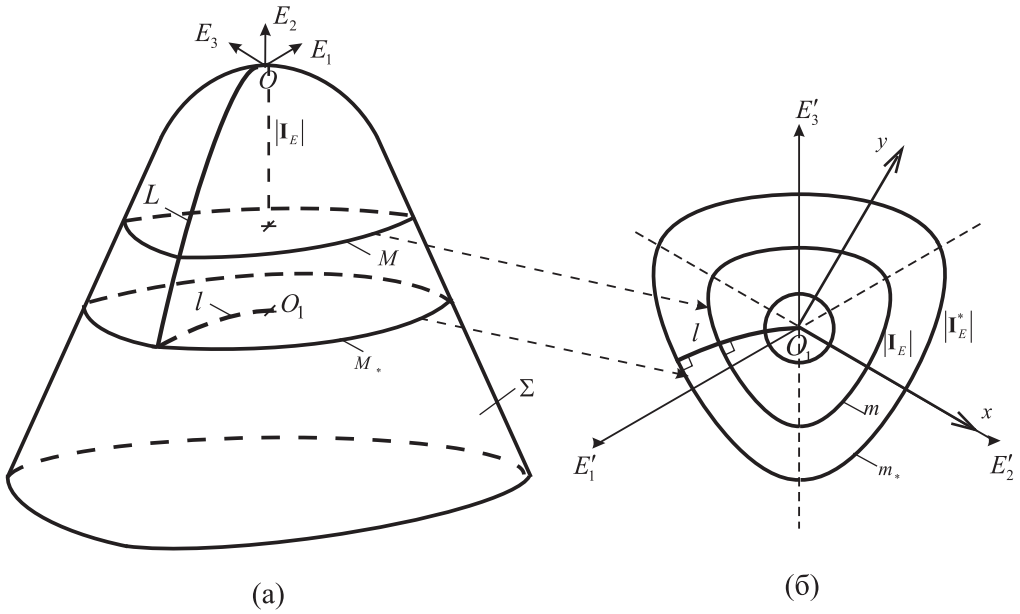

Рисунок 6 — Поверхность деформационных состояний Σ (а) и линии уровня (б)

(рисунок 6,(б)), определяемого системой уравнений, которая геометрически представляет пересечение поверхности Σ и плоскости, параллельной девиаторной:

$$\begin{cases} (1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = 1, \\ E_1 + E_2 + E_3 = I_E, \end{cases}$$

где I_E — первый инвариант тензора конечных деформаций Альманси, характеризующий уровень деформаций относительно поверхности Σ. В девиаторной плоскости уравнение линий уровня принимает следующий вид

$$6III_{D_E} + (3-2I_E)II_{D_E} = \frac{1}{36}\left[(3-2I_E)^3 - 27\right], \tag{7}$$

где II_{D_E} и III_{D_E} — второй и третий инварианты девиатора для тензора конечных деформаций Альманси. На отдельной (фиксированной) линии уровня, характеризуемой определённым значением параметра $|I_E|$, может быть поставлена задача теории идеальной пластичности.

Во *втором разделе* поверхность нагружения предложено связать с линиями уровня поверхности Σ, для чего вводится пропорциональность между девиаторами для тензоров напряжения и конечных деформаций:

$$D_\sigma = h_E D_E, \tag{8}$$

откуда следует связь между инвариантами рассматриваемых девиаторов:

$$II_{D_\sigma} = h_E^2 II_{D_E}, \quad III_{D_\sigma} = h_E^3 III_{D_E}. \tag{9}$$

Соотношение (8) определяет подобие между линиями уровня поверхности деформационных состояний и условием пластичности в пространстве главных напряжений, что обосновывается геометрическим характером линий уровня поверхности Σ и экспериментально подтверждаемым видом кривой текучести (выпуклый

замкнутый криволинейный треугольник с тремя осями симметрии в пространстве главных напряжений)[4]. Согласно (7) и (9) уравнение поверхности нагружения в инвариантах девиатора напряжения принимает вид

$$6III_{D_\sigma} + h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = \frac{h_E^3}{36}\left[(3 - 2I_E)^3 - 27\right], \tag{10}$$

где II_{D_σ} и III_{D_σ} — второй и третий инварианты девиатора напряжения. Поверхность (10) представляет собой цилиндрическую поверхность, проекции которой на девиаторной плоскости имеют вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии, и удовлетворяет необходимым требованиям: является выпуклой, гладкой и симметричной.

Для определения коэффициента пропорциональности h_E предлагается перестроить диаграмму нагружения: предполагается использование гипотезы единой кривой, но построенной не в традиционных координатах интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига, а в координатах предела текучести σ_S и модуля первого инварианта тензора конечных деформаций Альманси $|I_E|$. При этом используется связь между I_E и относительным удлинением образца δ при одноосном растяжении согласно (5):

$$I_E(\delta) = E_1(\delta) + E_2(\delta) + E_3(\delta) = -\frac{\delta^2(3 + 2\delta)}{2(1 + \delta)^2} < 0. \tag{11}$$

Коэффициент h_E предлагается определять из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца при $\sigma_1 = \sigma_S$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, откуда согласно (8) и (11) получаем

$$h_E(\delta) = \frac{2(1 + \delta)^2}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)}\sigma_S(\delta) > 0. \tag{12}$$

В *третьем разделе* рассматривается условие пластичности, определяемое проекциями поверхности нагружения (10) на девиаторной плоскости, которое в главных значениях тензора напряжения имеет вид

$$\begin{gathered}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E)\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \\ = \frac{h_E^3}{8}\left[(3 - 2I_E)^3 - 27\right];\end{gathered} \tag{13}$$

и проводится его сравнение с традиционно используемыми критериями Мизеса и Треска при различных деформационных состояниях. Известно, что классические

[4] В частности, в работах:
Писаренко Г. С., Лебедев А. А. О форме предельной поверхности механического критерия прочности // Прикладная механика. 1968. Т. 4, № 3. С. 45–50.
Поль Б. Микроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теория разрушения / Под ред. Г. Либовица. Москва: Мир, 1975. С. 336–520.
Yu M. H. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Applied Mechanics Reviews. 2002. Vol. 55, no. 3. P. 169–218.

критерии пластичности определяются в девиаторной плоскости окружностью для условия Мизеса:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_S^2; \tag{14}$$

и шестиугольником при условии Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S \quad \text{или} \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S; \tag{15}$$

где σ_S — предел текучести при одноосном растяжении цилиндрического образца. На рисунке 7 представлено графическое сравнение кривых текучести для условий Мизеса (14), Треска (15) и условия пластичности (13) при фиксированном значении σ_S. Очевидно, что при малых значениях относительного удлинения δ условие (13) практические совпадает с линией, определяющей условие Мизеса (14).

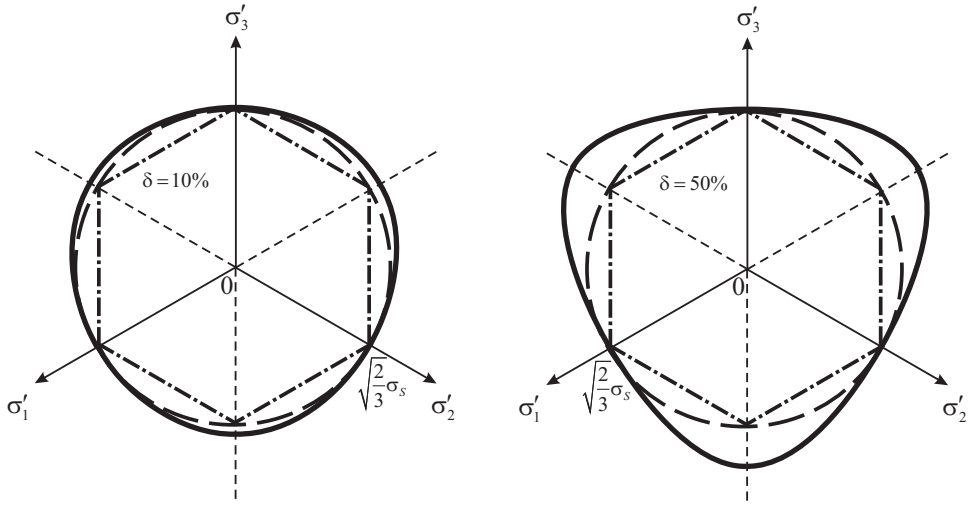

Рисунок 7 — Кривые текучести на девиаторной плоскости (при $\delta = 10\%$ и $\delta = 50\%$) для условий (14) — штриховая линия, (15) — штрихпунктирная линия, (13) — сплошная линия

Показано, что линия, характеризующая условие (13), пересекает проекции осей главных напряжений в точках, координаты которых определяются соотношениями

$$X_1' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_S, \quad X_3' = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{2(\delta+1)^3+1}{\delta[(3+2\delta)^2+3]}\left[2\cos\left(\frac{\xi+4\pi}{3}\right)-1\right]\sigma_S, \tag{16}$$

где $\xi = \arccos\left[1 - \dfrac{54}{(3-2I_E)^3}\right]$. При этом очевидное наличие ещё одного корня X_2, которое объясняется существованием частей поверхности (10) со стороны отрицательных октантов пространства напряжений (рисунок 8), в дальнейшей работе не учитывается, поскольку согласно определению поверхности нагружения — это «совокупность точек, представляющих различные напряжённые состояния...»[5]; а «точки, лежащие вне цилиндра, соответствуют невозможным напряжённым состояниям»[6]. Кроме того, очевидно, что поверхность нагружения должна охватывать начало координат[7].

[5] Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1954.

[6] Генки Г. О. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений // Теория пластичности. Сб. статей под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ. 1948. С. 114–135.

[7] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.

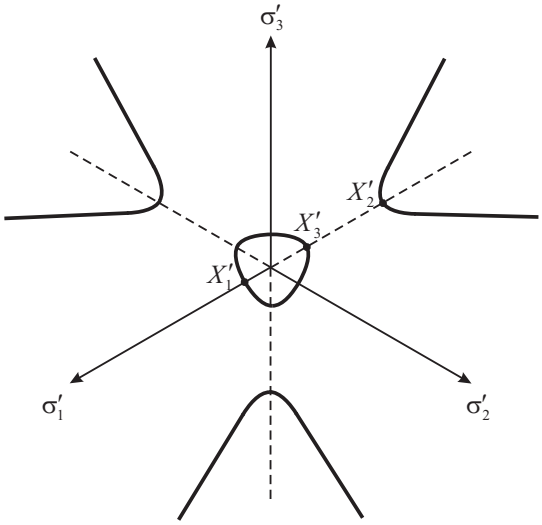

Рисунок 8 — Проекция поверхности нагружения (10) на девиаторной плоскости

Точки пересечения (16) соответствуют пределам текучести материала при одноосном растяжении σ_S^+ и сжатии σ_S^-:

$$X_1' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_S^+, \quad X_3' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_S^-. \tag{17}$$

Очевидно, что при использовании предлагаемого условия (13) наблюдается различие между пределами текучести на растяжение и сжатие (то есть учитывается эффект Баушингера), отношение между которыми определяется согласно (16) и (17) выражением

$$\frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-} = \frac{\delta\left[(3+2\delta)^2+3\right]}{2\left[2(\delta+1)^3+1\right]\left[2\cos\left(\dfrac{\xi+4\pi}{3}\right)-1\right]}. \tag{18}$$

Величина $\dfrac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-}$ влияет на вид кривой текучести (рисунок 7): при $\sigma_S^+ = \sigma_S^-$ кривая является окружностью, при различных значениях σ_S^+ и σ_S^- кривая принимает треугольнообразный вид, стремясь в пределе к треугольнику:

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\sigma_S^+}{\sigma_S^-} = \frac{1}{2}.$$

В работе рассматривается сравнение значения условного предела текучести на сжатие $\sigma_{0,2}^-$, прогнозируемого по условному пределу текучести на растяжение $\sigma_{0,2}^+$ согласно (18), с экспериментальным. Погрешность вычислений для выбранных конструкционных материалов (деформируемые стали) не превышает 7%.

Согласно ассоциированному закону пластического течения (2) главные значения тензора скорости деформации при условии пластичности (13) определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\Big]; \\
\varepsilon_2 = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_3-\sigma_1)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1)\Big]; \\
\varepsilon_3 = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2)\Big].
\end{aligned} \tag{19}$$

Суммирование соотношений (19) приводит к выполнению условия несжимаемости (1).

Далее рассматриваются особенности нового условия пластичности при различных деформационных состояниях. При плоской деформации условие (13) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
\left[(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z)(2\sigma_y-\sigma_z-\sigma_x) - 9\tau_{xy}^2\right](2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y) + \\
+\frac{3}{4}h_E(3-2I_E)\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2\right] = \\
= \frac{h_E^3}{8}\left[(3-2I_E)^3 - 27\right].
\end{gathered}$$

Компоненты тензора скорости деформации согласно (2) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z)\Big]; \\
\varepsilon_y = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_z-\sigma_x)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_x-\sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_y-\sigma_z-\sigma_x)\Big]; \\
\varepsilon_z = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = 3\lambda'\Big[-2(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 - 6\tau_{xy}^2 + \\
+\frac{h_E}{2}(3-2I_E)(2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y)\Big]; \\
\frac{1}{2}\eta_{xy} = \lambda'\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 9\lambda'\tau_{xy}\Big[-(2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y) + \frac{h_E}{2}(3-2I_E)\Big].
\end{aligned} \tag{20}$$

Показано, что при $\varepsilon_z = 0$ вид нового условия пластичности совпадает с условием Мизеса:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = K(\delta)\sigma_S^2, \tag{21}$$

отличие заключается в определении третьего «внеплоского» главного значения тензора напряжений:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E)\cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right).$$

Здесь

$$K(\delta) = \frac{4}{3}\frac{(3 - 2I_E)^2}{(3E_1 - I_E)^2}\cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) + 1\right],$$
$$E_1 = \frac{\delta(2+\delta)}{2(1+\delta)^2}, \quad I_E(\delta) = -\frac{\delta^2(3+2\delta)}{2(1+\delta)^2}, \quad \xi = \arccos\left[\frac{27}{(3-2I_E)^3} - 1\right].$$

Соотношения (20) приводят к выполнению условия несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

и условия соосности тензора скорости деформации и девиатора напряжения:

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\eta_{xy}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_x} - \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_y}}{2\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{s_x - s_y}{2\tau_{xy}};$$

однако не выполняется пропорциональность их компонент $\varepsilon_{ij} \neq \lambda' s_{ij}$, то есть при использовании условия (21) не выполняются уравнения теории пластичности Сен-Венана—Мизеса.

При осесимметричной деформации условие (13) определяется выражением

$$\begin{gathered}\left[(2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\varphi)(2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r) - 9\tau_{rz}^2\right](2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z) + \\ + \frac{3}{4}h_E(3 - 2I_E)\left[(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2\right] = \\ = \frac{h_E^3}{8}\left[(3 - 2I_E)^3 - 27\right].\end{gathered} \tag{22}$$

Как правило, решения задач строятся при предположении условия полной пластичности. В работе показано, что при $\sigma_\varphi = \sigma_3$ «третий закон пластичности»[8] в виде

$$\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

выполняется для условия (13) согласно (19) при $\sigma_3 = \sigma_1$ или $\sigma_3 = \sigma_2$, что определяет условие полной пластичности. В случае $\sigma_3 = \sigma_1$ условие (13) принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{4}h_E(3 - 2I_E)\left[2\cos\Phi + 1\right]; \tag{23}$$

[8] Надаи А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1954.

а при $\sigma_3 = \sigma_2$ получаем

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{4} h_E (3 - 2I_E) \left[2\cos\overline{\Phi} - 1 \right]. \tag{24}$$

Здесь $\Phi = \dfrac{\xi}{3} + \xi_{1,2,3}$, $\overline{\Phi} = \dfrac{\overline{\xi}}{3} + \xi_{1,2,3}$, $\xi = \arccos\left[\dfrac{54}{(3-2I_E)^3} - 1\right]$, $\overline{\xi} = -\xi$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \dfrac{2\pi}{3}$, $\xi_3 = \dfrac{4\pi}{3}$.

Сравнение решений (23) и (24) с условием пластичности Треска (15) приводит к системе соотношений[9]

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_2^I(\delta)\sigma_S \approx \mp\sigma_S, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm K_3^I(\delta)\sigma_S,$$

где

$$K_2^I(\delta) = -K_1^{II}(\delta) = \frac{(3-2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} \left[2\cos\left(\frac{\xi + 2\pi}{3}\right) + 1 \right] \approx -1,$$
$$K_3^I(\delta) = -K_3^{II}(\delta) = \frac{(3-2I_E)}{2(3E_1 - I_E)} \left[2\cos\left(\frac{\xi + 4\pi}{3}\right) + 1 \right].$$

С учётом (16) и (17) окончательно получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_S^-. \tag{25}$$

Аналогично получаются две другие системы соотношений:

– в случае $\sigma_\varphi = \sigma_2$ при условии полной пластичности $\sigma_2 = \sigma_1$ или $\sigma_2 = \sigma_3$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_S^-; \tag{26}$$

– в случае $\sigma_\varphi = \sigma_1$ при условии полной пластичности $\sigma_1 = \sigma_2$ или $\sigma_1 = \sigma_3$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S^+, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_S^-. \tag{27}$$

Уравнения (25)—(27) определяют два шестиугольника, изображённых на рисунке 9. При этом внутренний шестиугольник совпадает с условием Треска (15). На рисунке 9 показано, как полученные шестиугольники ассоциируются с новым условием пластичности (13) (треугольнообразная гладкая кривая изображена пунктирной линией).

Подстановка известных соотношений для напряжений:

$$\sigma_r = p + q\cos 2\psi, \quad \sigma_z = p - q\cos 2\psi, \quad \tau_{rz} = q\sin 2\psi,$$

где $p = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, $q = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, ψ — угол между первым главным напряжением и осью r; в условие (22) позволяет определить третье главное значение σ_φ:

– при $\sigma_\varphi - p = q \quad (\sigma_\varphi = \sigma_1)$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) + \frac{1}{8} h_E (3 - 2I_E) \left[2\cos\Phi + 1 \right],$$

[9] Индекс «I» соответствует решению (23), «II» — решению (24).

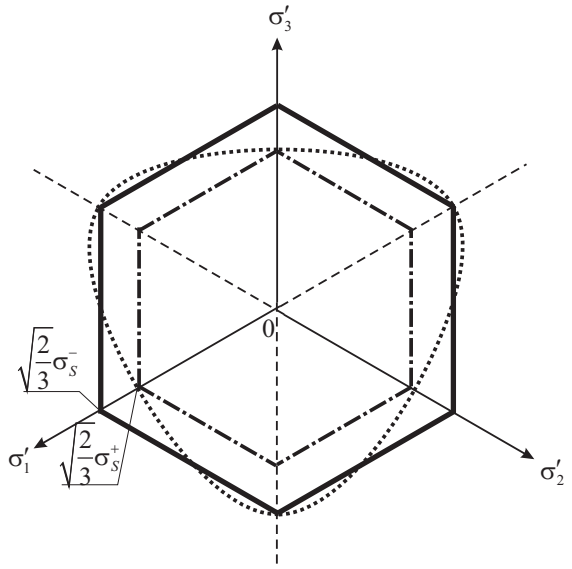

Рисунок 9 — Графическое сравнение условий (25)—(27) с условием Треска (15) на девиаторной плоскости

– при $\sigma_\varphi - p = -q \quad (\sigma_\varphi = \sigma_2)$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{8}h_E(3 - 2I_E)\left[2\cos\overline{\Phi} - 1\right],$$

которое очевидно связано с решениями (23) и (24), что позволяет выбрать значения σ_φ, сравнимые с условием Треска.

При плоском напряжённом состоянии ($\sigma_3 = 0$) условие пластичности определяется выражением

$$\begin{gathered}(2\sigma_1 - \sigma_2)(2\sigma_2 - \sigma_1)(-\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)\left[\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right] = \\ = \frac{h_E^3}{8}\left[(3 - 2I_E)^3 - 27\right].\end{gathered} \tag{28}$$

Условие текучести при растяжении и кручении ($\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$) определяется линией

$$\sigma(2\sigma^2 + 9\tau^2) + \frac{3}{2}h_E(3 - 2I_E)(\sigma^2 + 3\tau^2) = \frac{h_E^3}{8}\left[(3 - 2I_E)^3 - 27\right]. \tag{29}$$

На рисунке 10 представлены кривые текучести в плоскости относительных напряжений $\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_S}, \dfrac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$ для плоского напряжённого состояния и в плоскости $\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_S}, \dfrac{\tau}{\sigma_S}\right)$ для растяжения и кручения. Очевидно, что при $\delta \to 0$ линии (28) и (29) приближаются к эллипсам, характеризующим условие Мизеса в указанных деформационных состояниях.

Компоненты тензора скорости деформации ε_{ij} определены согласно ассоциированному закону пластического течения (2) для всех рассмотренных деформационных состояний.

В работе показано, что характер гиперболичности системы уравнений для напряжений, состоящей из дифференциальных уравнений равновесия и нового

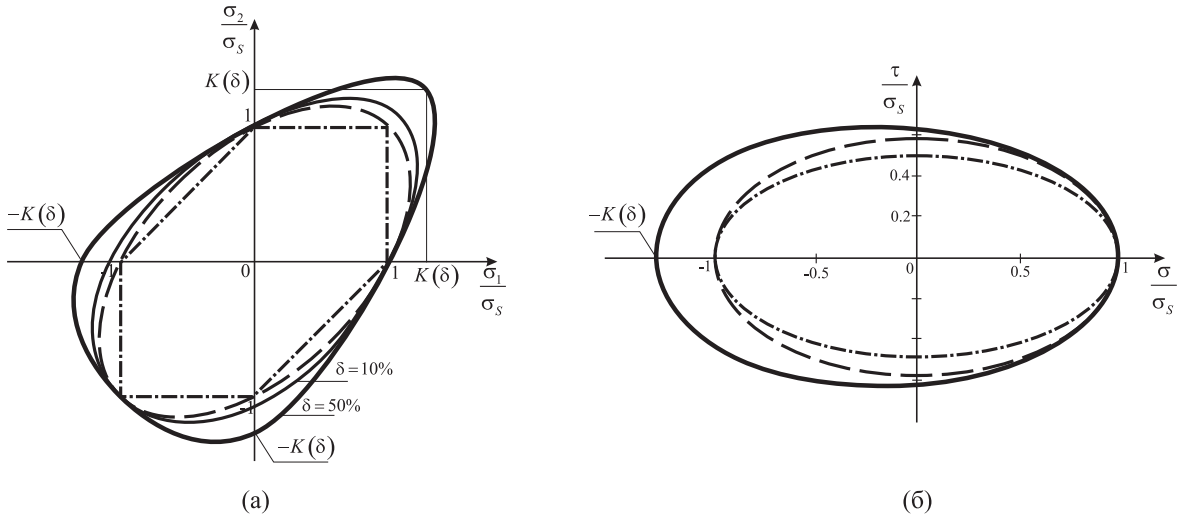

Рисунок 10 — Кривые текучести при плоском напряжённом состоянии (а), при растяжении и кручении (б): условие Мизеса — штриховая линия, условие Треска — шрихпунктирная линия, условия (28) и (29) — сплошная линия

условия пластичности, сохраняется; структура системы совпадает с соответствующими структурами систем дифференциальных уравнений при условии Мизеса в плоской деформации и при условии Треска в осесимметричной деформации при условии полной пластичности.

В *четвёртом разделе* получено энергетическое условие развития пластического течения и рассмотрены его особенности при различных деформационных состояниях. Подстановка в формулу (3) главных значений тензора скорости деформации (19) приводит к следующему виду энергетического условия в инвариантах девиатора напряжения:

$$27III_{D_\sigma} + 3h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = \frac{1}{\lambda'}\dot{W}_p,$$

или в главных значениях тензора напряжения:

$$\begin{gathered}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) + \\ + \frac{1}{2}h_E(3 - 2I_E)\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{1}{\lambda'}\dot{W}_p.\end{gathered} \tag{30}$$

При одноосном растяжении цилиндрического образца, когда $\sigma_1 = \sigma_S$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, условие (30) преобразуется к виду

$$\sigma_S^3(\delta)\frac{6(1+\delta)^3}{\delta(\delta^2 + 3\delta + 3)} = \frac{\dot{W}_p}{\lambda'}, \tag{31}$$

где скалярный множитель λ' должен определяться в каждой точке пути деформирования условием пластичности или упрочнения. В следующей главе получена связь величины $\dot{W}_p$ с параметром упрочнения, которая при условии (31) позволяет определить скалярный множитель λ' в виде конечного соотношения при одноосном растяжении цилиндрического образца.

В работе показано, что при условии плоской деформации энергетическое условие (30) с точностью до множителя совпадает с самим условием пластично-

сти (21), как и при осесимметричной деформации при условии полной пластичности. В частности, при плоской деформации получена пропорциональность множителя λ' и удельной мощности диссипации работы внутренних сил на пластических деформациях $\dot{W}_p$:

$$\lambda' = \frac{\dot{W}_p}{2K(\delta)\sigma_S^2}.$$

Энергетическое условие предлагается использовать в качестве дополнительного в системе определяющих соотношений теории упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела.

В **четвёртой главе** предложен подход к описанию предельных состояний пластических тел в пространстве главных напряжений, при котором вместе с поверхностью нагружения, связанной с линиями уровня поверхности Σ деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела, учитывается эффект Баушингера и конечность деформаций материала. Под предельным состоянием в работе понимается состояние исчерпания материалом его пластических свойств (предельное упрочнение).

В *первом разделе* рассматривается деформационно-энергетический подход к описанию процесса доведения материала до предельного состояния, позволяющий обобщить соотношения малоцикловой усталости на произвольные пространственные процессы деформирования, включая повторно статические нагружения с произвольной формой цикла. Выбор удельной диссипации энергии в качестве критериальной величины подтверждается многочисленными опытами на малоцикловую усталость, основным экспериментальным соотношением которой является формула Коффина-Мэнсона:

$$\varepsilon_p N^m = M, \tag{32}$$

где ε_p — ширина петли гистерезиса; N — число циклов; m, M — константы материала. Согласно энергетической трактовке формулы (32), данной С. Фелтнером, Дж. Морроу и Д. Мартином, мерой повреждения материала является суммарная энергия, рассеиваемая в единице объёма материала, вследствие наличия необратимых пластических деформаций, связанных с упрочнением материала. Материал достигает предельного состояния, когда накапливаемая энергия достигает критической величины:

$$\sum_{N=1}^{N_p} W_N = W_c, \tag{33}$$

где N_p — число циклов до разрушения; W_N — энергия, рассеиваемая в единице объёма материала при N-ом цикле; W_c — критическая величина энергии, равная энергии разрушения при статическом разрыве. При нелинейном законе упрочнения формула (32) принимает общий вид:

$$\Delta\varepsilon_p N^m = M(W_{**}). \tag{34}$$

где W_{**} — диссипация энергия, необходимая для доведения материала до предельного состояния. Учитывая, что разрушение материала после определённого числа

циклов связано с накоплениями деформаций и исчерпанием пластичности (с предельным деформационным упрочнением), предлагается связать предельное состояние материала с его предельным упрочнением и с соответствующим ему положением поверхности нагружения. Соотношение (33) не содержит упругих констант и, следовательно, при расчёте можно ограничиться рассмотрением упрочняющегося жёсткопластического тела. Связь между поверхностью нагружения и предельным состоянием материала определяется гипотезой, высказанной С. В. Серенсеном: предельным состоянием материала считается состояние исчерпания его пластических свойств, то есть состояние предельного упрочнения. В работе предполагается, что при определённом уровне деформирования условие пластичности определяется формой линии уровня, размер которой соответствует диаграмме нагружения для конкретного материала.

Связь между поверхностями деформационных состояний (7) и нагружения (10) предлагается определять на основе гипотезы единой кривой в виде зависимости $\sigma_S(|I_E|)$ текущего значения предела текучести материала от параметра упрочнения, в качестве которого выбран модуль первого инварианта I_E тензора конечных деформаций Альманси, характеризующий уровень деформаций относительно поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела. Построение поверхности нагружения для конкретных материалов предлагается связывать с описанием процессов одноосного деформирования плоских и цилиндрических образцов с использованием первого инварианта тензора конечных деформаций, определяемого через относительное удлинение образца δ при растяжении: при плоской деформации согласно соотношениям (4), при осесимметричной деформации — соотношениям (5).

Во *втором разделе* показано, что поведение предложенной в работе поверхности нагружения при упрочнении отличается от традиционных (изотропного и трансляционного). Согласно (10) закон упрочнения определяется в виде

$$6III_{D_\sigma} + h_E(3 - 2I_E)II_{D_\sigma} = F(|I_E|). \tag{35}$$

где F — возрастающая функция параметра $|I_E|$. Показано, что с ростом пластических деформаций поверхность расширяется, однако характер упрочнения является неравномерным, что объясняется различием пределов текучести материала при растяжении и сжатии, учитываемого в предложенном условии пластичности.

Определена связь удельной мощности диссипации работы внутренних сил $\dot{W}_p$ и выбранного параметра упрочнения $|I_E|$:

$$-h_E(\delta)\frac{dI_E(\delta)}{dt} = 2\dot{W}_p, \tag{36}$$

где $\dot{W}_p = \sigma_i\varepsilon_i > 0$ — диссипативная функция (3); $I_E < 0$, $\dfrac{dI_E}{dt} < 0$, $h_E > 0$. Из (36) следует, что если параметр $|I_E|$ не изменяется, то диссипация энергии равна нулю, то есть нагружение вдоль линии уровня поверхности деформационных состояний не должно приводить к пластическим деформациям. Используя величину коэффициента пропорциональности $h_E(\delta)$ согласно (12) условие (36) принимает

следующий вид

$$-\sigma_S(\delta)\frac{(1+\delta)^2}{\delta(\delta^2+3\delta+3)}\frac{dI_E(\delta)}{dt}=\dot{W}_p. \tag{37}$$

В качестве монотонного возрастающего параметра t, характеризующего развитие пластического течения, может быть принята величина относительного удлинения δ цилиндрического образца при одноосном растяжении. Тогда согласно (11), (31) и (37) получаем конечное соотношение для определения скалярного множителя:

$$\lambda'(\delta)=-\frac{1}{6\sigma_S^3(\delta)(1+\delta)}\frac{dI_E(\delta)}{d\delta}=\frac{1}{\sigma_S^2(\delta)}\frac{\delta(\delta^2+3\delta+3)}{6(1+\delta)^4},$$

связывающего компоненты тензора скорости деформации с компонентами тензора напряжения согласно ассоциированному закону пластического течения (2) при условии пластичности (13).

В *третьем разделе* предложен метод определения повреждаемости материала в поверхностном слое при технологической обработке на примере задачи о выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином в условиях плоской деформации, рисунок 11. Повреждаемость характеризуется критическим значением удельной работы внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала. Деформации в поверхностном слое при обработке выглаживанием предлагается рассматривать как однократное циклическое нагружение при $N=0,5$ и экспериментально определяемом $\Delta\varepsilon_p$ из технологического процесса, что позволяет использовать формулу (34) в виде

$$\Delta\varepsilon_p N^m=M(W_{**}),\quad W_{**}=W_c-W^h, \tag{38}$$

где W_{**} — работа внутренних сил, характеризующая зарождение макротрещины в исходном материале; W^h — работа внутренних сил в поверхностном слое на пластических деформациях, связанных с его упрочнением; W_c — суммарная работа внутренних сил (33), необходимая для разрушения в повреждённом материале.

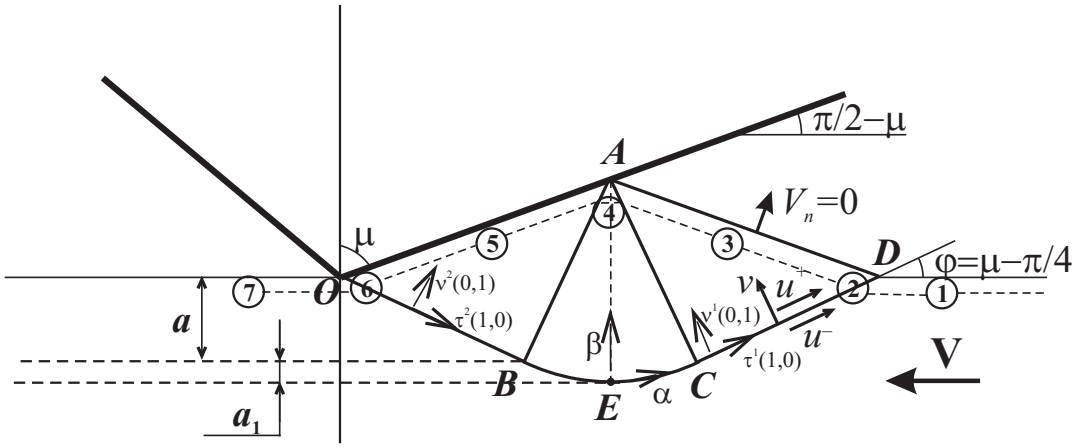

Рисунок 11 — Пластическое течение при выглаживании жёсткопластической полуплоскости острым клином

Получены распределения диссипации энергии в пластической области и деформации вдоль траектории движения частиц, состоящей из семи участков. Показано, что в окрестности точки E однородность деформирования пропадает и существенно зависит от величины нормальной скорости частиц, которая при $\alpha=0$

равна нулю. Это приводит к возрастанию деформации до критического значения $E_1 = 0,5$ и к неограниченному возрастанию удельной работы внутренних сил, что, в свою очередь, приводит к нарушению сплошности материала (к разрушению), то есть указывает на возможность зарождения макротрещин в подповерхностном слое толщиной a_1

Процессы деформирования на активных участках 2, 4 и 6 трактуются как полуциклы жёсткого деформирования в интервале начальных и конечных деформаций соответствующего этапа. Откуда следует, что в повреждении материала участвует не вся рассеянная энергия, а только её часть W^h, связанная с упрочнением. Очевидно, что рассеиваемая работа внутренних сил при однократном выглаживании вызывает повреждение и снижает способность материала упрочняться. Согласно (38) это приводит к уменьшению величины W_{**} на величину W^h, что соответствует уменьшению ресурса упрочнения материала. Согласно предложенной на рисунке 12 схеме значения W_{**} и W^h определяются по конечным деформациям частицы после пересечения ею пластической области:

– на рисунке 12,(а) показаны изменения параметра упрочнения $|I_E|$ на активных участках 2, 4 и 6 траектории движения частиц в зависимости от угла μ раствора выглаживающего клина; значения параметра упрочнения определяются по вычисленным аналитически главным значениям тензора конечных деформаций Альманси:

$$|I_E| = |E_1 + E_2|;$$

– на рисунке 12,(б) представлена зависимость параметра упрочнения $|I_E|$ от относительного удлинения образца δ, определяемого из эксперимента на одноос-

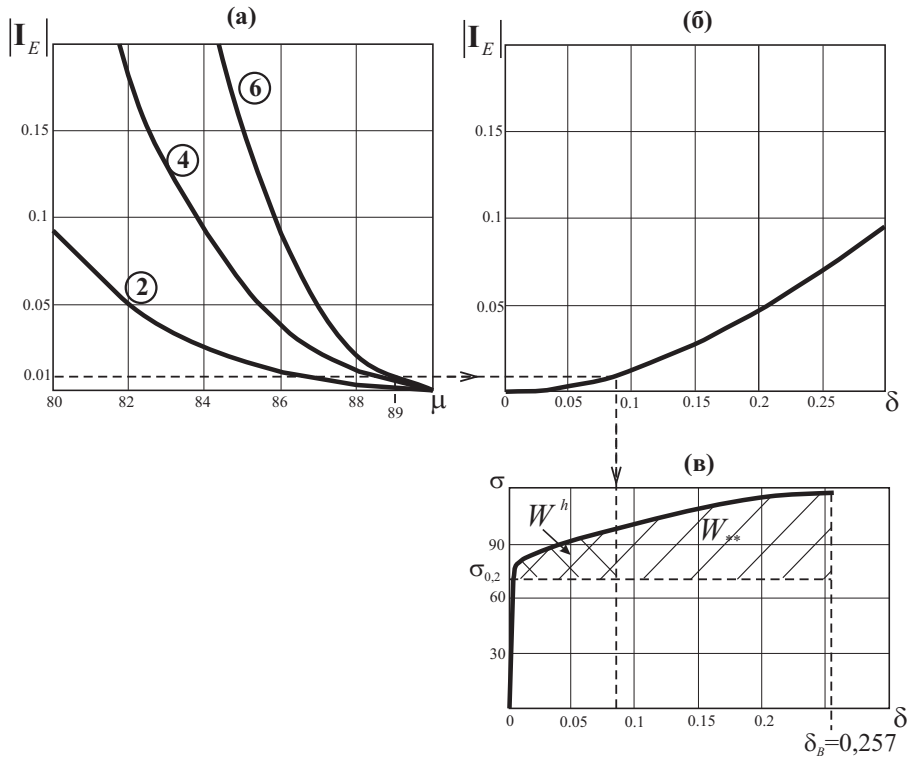

Рисунок 12 — Схема определения части работы внутренних сил, характеризующей повреждённость материала в процессе выглаживания (на примере стали ЭК79)

ное растяжение цилиндрического образца, которая согласно (4) принимает вид

$$|I_E| = |E_1 + E_2| = -\frac{\delta^2(2+\delta)^2}{2(1+\delta)^2};$$

– на рисунке 12,(в) показана диаграмма растяжения $\sigma - \delta$ стали ЭК79; значения диссипации энергии W_{**} и W^h определяются заштрихованными площадями фигуры, ограниченной кривой диаграммы растяжения и условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$ для выбранного материала.

В представленном на схеме случае угол клина принят равным $\mu = 89°$ и отношение площадей $\dfrac{W_{**}}{W^h} \approx 5,6$. Это означает, что ресурс материала в поверхностном слое при однократном выглаживании исчерпан на 17,9%.

Пятая глава посвящена описанию процесса распространения трещины в упругопластическом материале. Рассматривается схема пластического течения для трещины отрыва, аналогично предложенной в работе Дж. Райса для математического выреза[10], где в качестве меры деформации используется «техническая» деформация сдвига (тензор малых деформаций) и при интегрировании тензора скорости деформации не учитывается изменение конфигурации частиц в окрестности вершины трещины.

В *первом разделе* предложена модель установившего пластического течения в окрестности вершины распространяющейся трещины при условии, что материал почти достиг предельного состояния, что является основанием применения модели идеального жёсткопластического тела для описания процесса распространения трещины. Окрестность вершины трещины представлена составной, рисунок 13: внешняя часть является упругопластической, где напряжённо-деформированное состояние может быть определено известными численными методами; внутренняя область, ограниченная контуром $ACDBEFGA$, является жёсткопластической, что позволяет определять поля деформации и диссипации энергии аналитически.

Предложенная модель учитывает изменение конфигурации частиц материала в пластической области, и при переходе к предельной траектории движения частиц позволяет исключить из рассмотрения особенность поля диссипации энергии типа $1/r$ в окрестности вершины трещины. Гипотеза об установившемся пластическом течении позволяет не учитывать вращение свободных поверхностей границы трещины, и предполагает сохранение угла раскрытия трещины для образующихся при её распространении элементов свободной поверхности.

Получены распределения деформации и удельной диссипации энергии в пластической области вдоль траектории движения частиц, состоящей из двух участков (рисунок 14): прямолинейного L_1 в однородном поле деформирования (область EAB) и криволинейного L_2 в веере характеристик EAF (BAD). Причём необходимо рассматривать траектории в нижней и верхней частях пластической области. Предполагается, что две бесконечно близкие частицы расходятся на конечное расстояние с течением времени (см. рисунок 5,(в)), то есть разрушается не область, а совокупность частиц в окрестности вершины трещины. Общая энергия,

[10] Райс Д. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Либовица. Москва: Мир, 1975. С. 204-335.

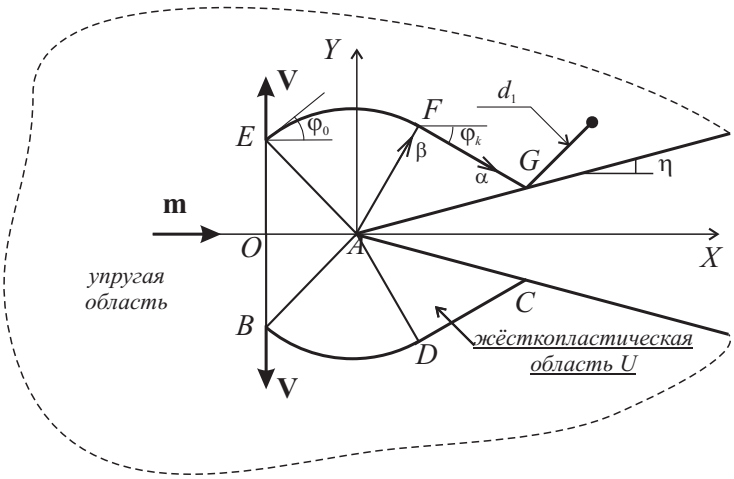

Рисунок 13 — Схема пластического течения в окрестности вершины трещины

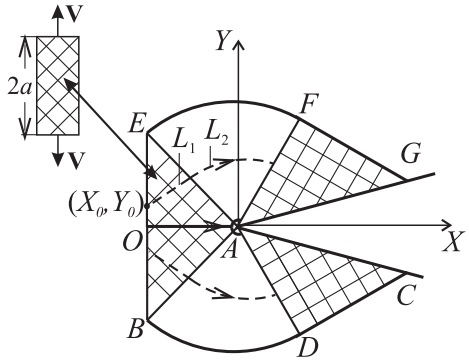

Рисунок 14 — Напряжённо-деформированное состояние и траектории движения частиц в окрестности вершины трещины

необходимая для доведения материала до предельного состояния и дальнейшего распространения трещины, определяется выражением

$$\frac{W}{2k} = \frac{V}{m} - 2\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) \frac{d\varphi}{u}. \tag{39}$$

При этом первое слагаемое естественно отнести к первому этапу разрушения (зарождение трещины). Второе (удвоенное) слагаемое определяет, сколько энергии необходимо для образований верхней и нижней частей свободной поверхности. Отмечено, что именно рассматриваемая в работе предельная траектория движения частиц, состоящая из отрезка OA и бесконечно малой дуги в окрестности точки A (рисунок 14), позволяет получить распределение диссипации энергии и деформаций в окрестности вершины трещины аналитически.

На основе закона сохранения энергии определён пластический интеграл, значение которого в предельном случае (при рассмотрении предельной траектории):

$$J_p = \frac{4\sqrt{2}k \cdot d_1}{m} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) d\varphi. \tag{40}$$

стремится к значению традиционного инвариантного J-интеграла:

$$J_p \approx J. \tag{41}$$

При этом рассеяние работы внутренних сил в конечной жёсткопластической области не учитывается (то есть не учитывается неинвариантность J-интеграла в жёсткопластической области). Соотношение (40) верно для малых пластических областей. Если эта область достаточно велика и трещина распространяется с постоянной скоростью m, предлагается использовать интеграл по всей жёсткопластической области U (без стягивания жёсткопластического контура в точку A)

и считать, что

$$\frac{J_p}{2k} \approx \frac{3Va}{m} d_1 + \frac{2\sqrt{2} d_1}{m} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi. \tag{42}$$

Знак приближённого равенства предполагает наличие «невязки» по касательной скорости $[V_\tau]$ на упругопластической границе и неучёт потенциальной упругой энергии в области U.

Используя известную зависимость значения J-интеграла с раскрытием трещины δ_k для тонкой пластины из идеальнопластического материала:

$$J = \sigma_S \delta_k,$$

выполняемую при условии пластичности Треска, где $\sigma_S = 2k$ — предел текучести при растяжении; в работе определена связь пластического интеграла J_p с δ_k–моделью разрушения в случае предельной траектории движения частиц в пластической области, когда справедливо (41), и для малых углов раскрытия трещины η, из которой следует связь δ_k–модели разрушения с углом раскрытия трещины η в предлагаемом в работе подходе:

$$\delta_k = \pi \eta d_1.$$

Далее в работе выражение (40) предлагается использовать для определения критического значения диссипации энергии W_*, которую необходимо добавить в материал для распространения трещины, по критическому значению J-интеграла J^*, определяемого из эксперимента. Согласно (39) и (40) соотношение между этими критическими величинами определяется выражением

$$\frac{J_p^*}{W_*} = -\frac{2\sqrt{2} d_1}{m} \frac{\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}},$$

которое справедливо для плоских и цилиндрических образцов для случая, когда при одноосном растяжении отсутствует чётко выраженная «шейка»; и аналогично (40) имеет место для малых пластических областей. Для пластической области конечных размеров и при постоянной скорости распространения трещины соотношение между критическим значениями диссипации энергии и J-интеграла должно определяться согласно (39) и (42) выражением

$$\frac{J_p}{W} = \frac{3Va + 2\sqrt{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{V - 2m \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}} d_1,$$

которое может быть использовано для определения характерного размера пластической области $a = OA$, необходимого для доведения материала до предельного

состояния при движении частицы вдоль предельной траектории с последующим её разрушением в верхнем и нижнем веерах линий скольжения при установившемся режиме распространения трещины.

Отмечено, что описание процесса образования двух новых свободных поверхностей при разрушении возможно при наличии в пластической области двойной особой точки поля скоростей перемещений (в представленной на рисунке 13 схеме — в виде совпадения двух центров вееров линий скольжения в вершине трещины). Это условие обеспечивает расхождение на конечное расстояние двух бесконечно близких частиц перед вершиной трещины, которые деформируются по двум предельным траекториям в окрестности центров вееров линий скольжения.

Во *втором разделе* предложена модель неустановившегося пластического течения, позволяющая описать процесс затупления углового выреза, при несимметричном пластическом течении (рисунок 15), когда частицы перемещаются с одной стороны выреза на другую, рисунок 16. При этом нарушения сплошности материала (разрушения) не происходит. В отличие от течения с разрушением (рисунок 13) частица материала пересекает пластическую область «справа-налево» (при нахождении в пластическом состоянии верхней полуплоскости): первоначально частица деформируется в веере EAF и далее испытывает дополнительные пластические деформации на линии разрыва AE поля скоростей перемещений. Данное замечание учитывается при определении распределения деформации и диссипации энергии в пластической области.

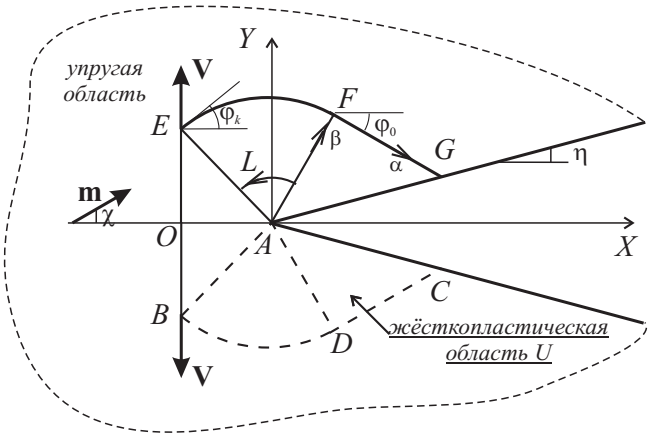

Рисунок 15 — Схема пластического течения в окрестности вершины V-образного выреза без разрушения

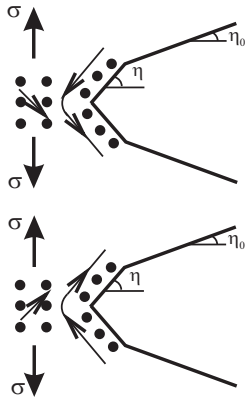

Рисунок 16 — Движение частиц в окрестности вершины выреза без разрушения

В **заключении** к работе отмечено, что предложенный подход позволяет описать процесс разрушения как совокупность процессов достижения материалом предельного состояния и распространения трещины с единых позиций, даёт новые методы расчёта модельных и прикладных задач теории пластического течения и механики разрушения.

Основные результаты работы определяются следующими положениями:

1. Сформулированы задачи, моделирующие процессы деформирования и разрушения материала в рамках теории пластического течения. Под разрушением понимается нарушение сплошности среды (нарушение непрерывности отображения

конфигурации материальных частиц); при непрерывном пластическом течении две бесконечно близкие частицы всегда остаются бесконечно близкими.

2. Показано, что в теории пластического течения заложена модель разрушения, учитывающая изменение тензоров конечных деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

3. Сформулированы критерии разрушения материала при пластическом течении. При этом процесс разрушения необходимо рассматривается как совокупность процессов доведения материала до предельного состояния (зарождение макротрещины) и распространения макротрещины, что следует из экспериментального наблюдения процессов разрушения образцов.

4. Определена единая критериальная величина достижения материалом предельного состояния и условия распространения трещины. В качестве критериальной величины принята удельная работа внутренних сил.

5. Сформулирован подход к описанию предельных состояний упрочняющегося несжимаемого жёсткопластического тела. Подход основан на гипотезе С. В. Серенсена об исчерпании пластичности материала, из которого следует, что предельное состояние связано с предельным упрочнением материала или предельным условием пластичности. Предложенное условие пластичности связывается со взаимным расположением сечений поверхности деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела и поверхностью нагружения.

6. Установлена связь новой критериальной величины с традиционными критериями механики разрушения (инвариантный J-интеграл, δ_k-модель разрушения).

7. Сформулированы задачи приложения рассматриваемого подхода к вопросам технологической и эксплуатационной наследственности и её влияния на трещиностойкость элементов конструкций.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Полученные на основе теории пластического течения результаты существенно расширяют область приложения механики разрушения. В дальнейшем развитии темы результаты работы определяют направления, связанные с описанием момента зарождения трещины в упругопластических материалах; исследованием областей локализации пластических деформаций, являющихся, как правило, источником развития трещин, но представляющих в настоящее время дискуссионный характер; исследованием влияния технологических процессов и эксплуатационной наследственности на приближение материала к предельному состоянию, связанных с различными деформационными процессами (механическая обработка деталей конструкций, повреждение материала при различных ударных воздействиях при эксплуатации и другие).

Перспективным представляется использование аналитических результатов при реализации численных расчётов для различных деформационных процессов, связанных с пластическим деформированием. В частности, внедрение предложенного подхода в пакеты программ численного расчёта типа MSC.Marc, ANSYS.

Публикации по теме диссертации

в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Буханько А. А., Хромов А. И. Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // Дальневосточный математический журнал. 2002. Т. 3, № 2. С. 311–319.
2. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций // Доклады Академии наук. 2006. Т. 407, № 6. С. 777–781.
3. Хромов А. И., Буханько А. А., Козлова О. В., Степанов С. Л. Пластические константы разрушения // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 147–155.
4. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Расчёт полей деформаций в задачах обработки материалов давлением при наличии особенностей поля скоростей перемещений // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2006. № 9. С. 22–27.
5. Хромов А. И., Буханько А. А., Лошманов А. Ю. Течение жёсткопластического материала по каналу постоянной высоты с круговым изгибом и угловой точкой // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1(48). С. 147–150.
6. Буханько А. А., Степанов С. Л., Хромов А. И. Растяжения полосы с V-образными вырезами и разрушение пластических тел // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2007. № 3. С. 177–186.
7. Хромов А. И., Буханько А. А., Патлина О. В., Кочеров Е. П. Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2008. № 1(16). С. 53–58.
8. Буханько А. А., Григорьева А. Л., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2009. № 6. С. 178–186.
9. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Самойлов В. А. Адиабатическое распределение диссипации энергии в окрестности центра веера характеристик // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2009. № 2(19). С. 252–256.
10. Кочеров Е. П., Буханько А. А., Хромов А. И. Деформационно-энергетический подход и малоцикловая усталость материалов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2011. № 3-1. С. 23–27.
11. Хромов А. И., Буханько А. А., Кочеров Е. П. Деформационно-энергетический подход к описанию процессов разрушения пластических тел // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4(4). С. 1839–1840.
12. Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в вершине трещины, деформации и энергетический критерий разрушения // Доклады Академии наук. 2012. Т. 442, № 3. С. 333–336.
13. Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в окрестности вершины

трещины. Энергетический критерий разрушения и его связь с J-интегралом // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 6. С. 112–120.

14. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Овчинникова С. А. Методика оценки влияния поверхностной обработки на малоцикловую усталость материала // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2012. № 5(36). С. 92–96.
15. Буханько А. А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 1(30). С. 199–206.
16. Буханько А. А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, для различных процессов деформирования // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. № 9–2(110). С. 43–54.
17. Хромов А. И., Буханько А. А., Овчинникова С. А. Предельное состояние и малоцикловая усталость пластических материалов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 148–158.
18. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Предельные состояния пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3(17). С. 94–102.

в других научных изданиях

19. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций и разрушение пластических тел // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. Москва: Физматлит, 2006. С. 809–819.
20. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Stepanov S. L., Kocherov E. P. Concentrators of deformations and fracture of plastic bodies // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. Vol. 215, no. 2. P. 457–466.
21. Khromov A. I., Bukhanko A. A., Kocherov E. P., Fedorchenko D. G. Deformation and Fracture of Plastic Bodies in a Neighborhood of Strain Concentrators // Assessment of Reliability of Materials and Structures: Problems and Solutions: Proceedings of the Intern. Conference. SPb.: Polytechnic University Publishing, 2008. P. 162–165.
22. Khromov A. I., Bukhanko A. A. Strain-Energy Criteria and Fracture of Plastic Bodies in a Neighborhood of Strain Concentrators // XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book. 2008. P. 245.
23. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Разрушение пластических тел // Сборник трудов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвящённой 80-летию Д. Д. Ивлева. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2010. С. 80–84.

24. Буханько А. А., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический подход к оценке прочности элементов конструкций // Труды международной конференции «Живучесть и конструкционное материаловедение». Т. 1. Москва: ИМАШ РАН, 2012. С. 46–55.
25. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Предельные состояния пластических тел // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий: сб. ст. по мат-лам междун. научн.-практ. конф.: в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. С. 37–42.
26. Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Обобщение теорий пластического течения и малоцикловой усталости на механику разрушения // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела: в 2 т. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. С. 115–119.
27. Буханько А. А., Хромов А. И. Энергетическое условие развития пластического течения, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. С. 68–71.
28. Bukhanko A. A., Loshmanov A. Y., Khromov A. I. Limiting states of plastic materials // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014), 22–28 September 2014, Rhodes, Greece. Vol. 1648. American Institute of Physics, 2015.

Автореферат разрешён к печати диссертационным советом
Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
08.06.2015 г.

Подписано в печать 09.06.2015 г. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 2,25. Тираж 150 экз. Заказ № 2331

Отпечатано в отделе полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38