

На правах рукописи



Спиридонова Екатерина Владимировна

**Численно-аналитическое решение плоских задач
теории трещин со смешанными
краевыми условиями**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Оренбург – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Научный руководитель: **Полкунов Юрий Григорьевич**
доктор технических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Морозов Евгений Михайлович**
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры физики прочности
НИЯУ «Московский инженерно-
физический институт»,
Заслуженный деятель науки РФ

Мурашкин Евгений Валерьевич
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник лабора-
тории моделирования в механике дефор-
мируемого твердого тела
ФГБУН «Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский государ-
ственный машиностроительный уни-
верситет (МАМИ)»

Защита диссертации состоится 17 сентября 2015 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева» по адресу: 428000, Чувашская Республика, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38, ауд. 406.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева» (www.chgpu.edu.ru).

Автореферат разослан «17» июля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент



С.В. Тихонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Известно, что горные породы имеют структурно-неоднородное блочно-слоистое строение. Блочная структура проявляется на разных масштабных уровнях, от размеров кристаллических зерен до блоков горного массива. Зачастую блоки связаны между собой пустыми или заполненными грунтом трещинами. Эти ослабления определяют направления возможного разрыва или взаимного скольжения частей массива. Разрушение геоматериалов происходит в результате нормального отрыва, сдвига, скалывания или среза. При этом во время сжатия разрушение происходит в основном в результате скалывания, а при растяжении – в результате нормального отрыва. Задачи, связанные одновременно со сжатием и сдвигом трещины в твердых породах, представляют особый интерес. Они находят практическое применение при строительстве зданий и сооружений, в геомеханике горных пластов при оценке устойчивости бортов карьеров и выработок, при поиске и разработке месторождений полезных ископаемых, при оценке последствий горных ударов, землетрясений и др.

Экспериментальные данные геофизических исследований показали, что при сжатии и сдвиге в трещинах горного массива возникают нормальные раскрытия и сдвиги по ее берегам. Для описания данного процесса были предложены различные модели: модель пилообразной трещины, модели Р.Е. Гудмана, дилатансионная модель, вязко-пластическая модель, модель Е.М. Андерсона, модели М.А. Чиннэри, Т. Маруяма и другие. Данные модели рассматривают только случаи, когда к берегам основной трещины приложены напряжения, и устанавливают связь между напряжением и раскрытием трещины.

Трещины нормального отрыва и трещины сдвига являются частным случаем трещины смешанного типа. Исследованию трещин отрыва и сдвига посвящено множество работ российских и зарубежных ученых, включая работы известного механика Г.П.Черепанова. В его работах можно найти большое количество аналитических выкладок, касающихся описания развития трещины отрыва. Но аналитические решения задач о трещинах смешанного типа не рассматривались в связи со сложностью математических вычислений и различных проблем, связанных с идентификацией физической картины образования трещины. В связи с этим разработка численных методов решения задач об образовании трещин смешанного типа является актуальной задачей механики и геомеханики, т.к. позволяет выйти на новый класс задач, который решается численными или полуаналитическими методами.

Целью диссертационной работы является численное решение ряда краевых задач о раскрытии берегов плоской трещины смешанного типа в твердых телах, построение аппроксимирующих функций смещений берегов трещины в аналитическом виде и вычисление коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) 1-го и 2-го рода.

Основными задачами работы являются:

1. Анализ аналитических и численных методов решения линейных краевых задач теории трещин, методов вычисления КИН 1-го и 2-го рода, избранных математических моделей разрушения материалов.

2. Создание алгоритма и программы в Borland Delphi 6.0 для численного решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями.

3. Качественный анализ численных решений краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями для широкого диапазона значений модуля Юнга ($10^6 \div 10^{13}$ Па) и коэффициента Пуассона ($0.1 \div 0.49$), с учетом и без учета действия массовых сил.

4. Аппроксимация раскрытий берегов трещины и построение аналитических выражений КИН 1-го и 2-го рода в виде предельных соотношений согласно работам А.М. Линькова.

5. Оценка состояния развития трещины смешанного типа в геоматериалах на основе силового критерия хрупкого разрушения по результатам решения краевых задач методом разрывных смещений.

Методология и методы исследований. Для решения краевых задач теории трещин применяется одна из разновидностей метода граничных элементов - метод разрывных смещений. Численное решение, визуализация решения и его анализ реализованы в Borland Delphi 6.0. Для аппроксимации разрывов смещений берегов в виде непрерывных функций используется метод наименьших квадратов. Аналитические выражения нормальных раскрытий Черепанова и вышеуказанные формулы, приведенные в работах Линькова, используются в исходном виде.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Разработан комплекс программ для численных расчетов по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины смешанного типа (одиночной; в трещиноватом массиве) и для проведения анализа идентичности распределений раскрытий берегов в присутствии и отсутствии массовых сил, включающий решение методом разрывных смещений.

2. Проведен анализ идентичности распределения раскрытий трещин смешанного типа в песчанике под действием массовых сил и в их отсутствии. По результатам анализа определены субкомбинации краевых условий, для которых имеется полная ($\tau=0.001\%$) и частичная ($\tau=30\%$) идентичность распределения раскрытий и обнаружена взаимозаменяемость функций распределения раскрытий берегов с однотипными краевыми условиями.

3. В рамках исследования полной идентичности раскрытий берегов трещины расширена область применения аналитических выражений Г.П. Черепанова (раскрытия берегов трещин нормального отрыва) в отношении трещин смешанного типа.

4. На основе анализа результатов численных решений, полученных при варьировании значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона в ши-

роком диапазоне допустимых значений, установлены закономерности смещений берегов трещины в продольном и поперечном направлениях. При изменении механических характеристик – модуля Юнга и коэффициента Пуассона, - наблюдается квазилинейная зависимость смещений от модуля Юнга и нелинейная (монотонная или с одним экстремумом) зависимость от коэффициента Пуассона.

5. Получены аппроксимации функции нормальных и касательных смещений берегов трещины и аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода для избранных краевых задач теории трещин смешанного типа в отсутствие действия массовых сил.

Теоретическая и практическая значимость работы. Представленные в диссертации результаты решения краевых задач теории трещин смешанного типа свидетельствуют о том, что численно решен ряд задач теории трещин, для которых недоступно аналитическое решение. Решения получены при значениях механических характеристик материалов, охватывающих как обычные упругие материалы, так и геоматериалы, в которых трещины образуются непосредственно под действием сил тяготения. При этом взяты свойства материалов в широком диапазоне изменений значений модуля Юнга (от резины до сверхупругих материалов) и коэффициента Пуассона (от слабосжимаемых до практически несжимаемых материалов). Результаты некоторых из них разобраны подробно в отдельной главе.

Практическая значимость состоит в том, что применительно к геоматериалам есть возможность прогнозирования появления критических смещений породы, при которых происходит разрушение материалов с учетом их механических свойств, что позволяет дать оценку устойчивости бортов карьеров, подземных сооружений (выработок), откосов, отвалов и др.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Алгоритм решения краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями и расчета КИН 1-го и 2-го рода для сплошных и нарушенных трещиноватостью материалов.

2. Комплекс программ для численного решения плоских задач теории трещин по определению разрывов смещений ее берегов (одиночной; в трещиноватом массиве) и для проведения анализа идентичности распределений раскрытий берегов в присутствии и отсутствии массовых сил, включающий решение методом разрывных смещений.

3. Аналитические выражения раскрытий берегов трещины, образованные аппроксимируемыми полиномами, зависящими от координат расчетных точек и граничных условий задачи.

4. Коэффициенты интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода для сплошной и нарушенной среды, пропорциональные функциям распределения раскрытий вблизи вершины зияющей части трещины, включающие численно найденные смещения и напряжения на берегах трещины.

Степень достоверности результатов определяется следующим:

1. В диссертации используются математически корректные постановки задач на основе фундаментальных уравнений упругости и механики хрупкого разрушения.

2. Численное решение краевых задач получено с помощью апробированного метода – метода разрывных смещений.

3. Величина погрешности оценивалась на базе исследования идентичностью результатов расчета раскрытий трещины нормального отрыва как частного случая трещины смешанного типа с аналитическими выражениями раскрытий Г.П. Черепанова.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: школа-семинар «Современные проблемы механики и прикладной математики» (Воронеж, 2007); международная конференция «Актуальные проблемы математики, информатики и механики» (Воронеж, 2009); научный семинар «Актуальные проблемы математического моделирования» под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Радаева Ю.Н. (Самара, 2010); 2-я международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2010); всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики, математики, информатики» (Пермь, 2010); 10-я всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2010); 8-я всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2011); международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 2014), семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Миронова Б. Г. (Чебоксары, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы отражены в 19 публикациях, в том числе 1 монография, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ «Программный комплекс для численного решения плоских задач теории трещин со смешанными краевыми условиями», 5 статей изданы в журналах, которые входят в перечень издательств, рекомендованных ВАК РФ.

Личный вклад автора. Постановка краевых задач, выбор метода их решения были выполнены совместно с научным руководителем. В совместных работах автору принадлежит основная часть работы, связанная с разработкой алгоритма, пакета компьютерных программ для решения поставленных смешанных задач, построении аналитических зависимостей коэффициентов интенсивности напряжения 1-го и 2-го рода, а также анализе полученных результатов.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, заключения и приложений. Объем диссертации 157 страницы, включая 73 рисунка и 54 таблицы. Список литературы состоит из 126 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается необходимость теоретических исследований процесса развития трещин и построения решений краевых задач теории трещин, которые можно уточнять и совершенствовать на основе результатов натуральных испытаний материалов. Обосновывается актуальность моделирования развития трещин в геомеханике. В завершении приводятся квалификационные признаки диссертационной работы и список апробации результатов диссертационного исследования на научных и научно-технических мероприятиях.

В первой главе рассматриваются линейные краевые задачи теории трещин в рамках совместного описания процессов упругого деформирования тел с разрезом и разрушения материалов под действием критических нагрузок поперек (нормальные смещения и напряжения) и вдоль (касательные смещения и напряжения) берегов трещины. В постановках задач реальная трещина геометрически упрощается и заменяется математическим разрезом плоскости. Рассматривается развитие трещины, которое происходит под действием контактных усилий. Также рассматриваются различные подходы к решению задач теории трещин и оценке состояния ее развития (стагнации) на основе силового и энергетического подходов. Для этого используется понятие коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), показывающих меру разрушения материалов.

В §1.1 приводятся дифференциальные уравнения упругости, применяемые в решении плоских задач теории трещин. Уравнения учитывают влияние массовых сил, к которым следует в первую очередь отнести естественную – силу гравитационного притяжения, поскольку в условиях земного тяготения гравитация является одной из причин, определяющих развитие трещины. Если принять отсчетным направление действия массовых сил в отрицательном направлении вдоль оси ординат, то для острого угла θ между направлением вектора \mathbf{g} действия массовых сил и нормалью к срединной линии, эквидистантной относительно берегов трещины, в явном виде

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\mathbf{g}\| \end{pmatrix}.$$

В теории трещин дифференциальные уравнения линейной статической упругости, учитывающие массовые силы, имеют следующий вид:

уравнения статики в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y = 0;$$

уравнения совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2};$$

закон Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right], \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy};\end{aligned}$$

компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right);$$

уравнения статики в смещениях

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho g_x &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g_y &= 0.\end{aligned}$$

Решение задач теории трещин в зависимости от упругого состояния тела на основе уравнений - определяет форму трещины, поля напряжений и смещений ее берегов.

В §1.2 в качестве метода численного решения задач теории трещин со смешанными краевыми условиями выбран один из типов метода граничных элементов – метод разрывных смещений. Граничные интегральные уравнения метода разрывных смещений детально рассмотрены в работе А.М. Линькова, где показано, как при переходе от интегральной форме записи к конечным суммам образуется система линейных алгебраических уравнений. Решение задач производится в постановке, где трещина моделируется прямолинейным математическим разрезом конечной длины, часть берегов трещины находится под действием сдвиговых и нормальных смещений, а часть – под действием сдвиговых и нормальных напряжений, включая компоненты вектора σ^g массовых сил. Поэтому для i -го граничного элемента образующее интегральное уравнение первоначально распадается на 4 уравнения, представленных конечными суммами ($j = \overline{1, J}$)

$$\begin{aligned}u_s^i &= \sum_j B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_j B_{sn}^{ij} D_n^j, & \sigma_s^i &= \sum_j A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_j A_{sn}^{ij} D_n^j + \sigma_s^{gi}, \\ u_n^i &= \sum_j B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_j B_{nn}^{ij} D_n^j, & \sigma_n^i &= \sum_j A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_j A_{nn}^{ij} D_n^j + \sigma_n^{gi}.\end{aligned}$$

где неизвестные в правых частях имеют смысл граничных коэффициентов влияния. Для одного и того же граничного элемента может быть задано либо смещение либо напряжение. Решение позволяет определить раскрытия для каждого граничного элемента.

В §1.3 рассматривается понятие КИН и его роль в оценке состояния развития трещины. Указывается, что стадии процесса разрушения – зарождение трещины и ее развитие, – имеют свои физические особенности. В

частности, КИН используются только при наличии образованной трещины и являются дополнительными краевыми условиями при решении вопроса о предельном равновесии тела с трещиной или системой трещин, а состояние равновесия считается достигнутым, если трещиноподобный разрез получил возможность распространяться.

В §1.3.1 формулируется ряд выражений, связывающих компоненты векторов смещений и напряжений с КИН 1-го и 2-го рода (соответственно K_I и K_{II}). Приводятся основные соотношения механики разрушения, характеризующие роль КИН в оценке состояния развития трещины на основе силового и энергетического критериев при плоском напряженном и плоском деформированном состоянии тела.

В §1.3.2 рассматриваются некоторые численные методы поиска КИН 1-го и 2-го рода и приводится удобный и практичный асимптотический метод, который состоит в следующем. Решение краевой задачи упругости представляет возможность определить один из видов упругих полей и на его основе найти второе (например, поле смещений через поле напряжений, и наоборот). При постановке задачи упругости в смещениях из решения следует

$$D_n(x) = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+), \quad D_s(x) = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$$

– соответственно нормальные и касательные раскрытия (разрывы) берегов трещины [м]. Применение аппроксимации на коротких участках берегов трещины вблизи ее вершины позволяет получить функции в явном виде и в случае плоских трещин длиной L воспользоваться на основе асимптотического подхода аналитическими выражениями А.М. Линькова¹ для вычисления КИН 1-го и 2-го рода

$$K_I = -\frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n(x)}{\sqrt{L-x}}, \quad K_{II} = -\frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_s(x)}{\sqrt{L-x}},$$

где G – модуль сдвига, Н/м²; ν – коэффициент Пуассона.

В §1.4 производится анализ избранных моделей разрушения материалов и делается вывод о том, что во всех моделях отсутствует возможность использования смешанных краевых условий на берегах трещины.

В §1.5 рассматривается вопрос о формировании трещиноватости в геоматериалах, приводится таблица основных размеров (габаритов) трещин в геомеханике и излагаются характерные особенности образования и развития трещин в геоматериалах.

Во **второй главе** анализируются распределения разрывов смещений берегов трещин смешанного типа.

В §2.1 осуществляется типизация плоских краевых задач теории трещин со смешанными граничными условиями. Составлена таблица субкомбинаций краевых условий, образуемых комбинаторным путем для компонентов векторов смещений и напряжений на берегах трещины. В

¹ Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб: Наука, 1999, 382 с.

таблице представлены типичные постановки краевых условий на берегах трещины, разделенной на основную и зияющую части.

В §2.2 приводится алгоритм решения плоских краевых задач теории со смешанными граничными условиями. Последовательность включает ряд этапов по решению краевой задачи в типичной постановке и вычислению КИН:

- 1) формирование таблицы физических свойств горной породы и геометрической модели трещины в виде математического разреза плоскости;
- 2) формирование системы краевых условий в рамках теории метода граничных элементов;
- 3) формирование замкнутой системы линейных алгебраических уравнений и приведение ее к матричному виду;
- 4) решение системы линейных алгебраических уравнений;
- 5) представление решения системы в виде таблицы нормальных и сдвиговых раскрытий по номерам граничных элементов;
- 6) построение функционала, интерполирующего раскрытия;
- 7) аппроксимация раскрытий в зияющей части трещины;
- 8) вычисление КИН 1-го и 2-го рода.

В §2.3 приводится описание программного комплекса [19] для моделирования раскрытия трещины и анализа идентичности распределений разрывов смещений берегов раскрывающихся трещин. Фрагменты интерфейса показаны на рисунках 1-3.

В §2.4 выполнен анализ идентичности раскрытий берегов трещин на основе решений краевой задачи для всех субкомбинаций краевых условий в песчанике. Геометрические модели трещин в общем случае приведены на Рис.4,5, где обозначено: АО, ОВ – основная и зияющая части (длиной b и L), В – вершина трещины; краевые условия: $\mathbf{u}_0 = (u_n^0 \quad u_s^0)^T$ - вектор смещений, $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\sigma_n^0 \quad \sigma_s^0)^T$ - вектор напряжений. В начале параграфа приводятся исходные данные по нагрузкам, габаритам трещины, свойствам геоматериала (песчаник) и количеству граничных элементов. Зияющая часть разбивалась на 750 элементов, что позволило получить различия между численными значениями нормальных раскрытий, вычисленными по формуле Черепанова²

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{-4u_n^0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \right]$$

для координат узлов сетки граничных элементов и численно методом разрывных смещений, лишь после 3-го знака после запятой. Также рассматривается вопрос о выборе метода решения системы линейных алгебраических уравнений (п.4 последовательности) и показывается, что метод Гаусса в процессе применения является устойчивым и имеет равное 1 число обусловленности.

² Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1987, 308 с.

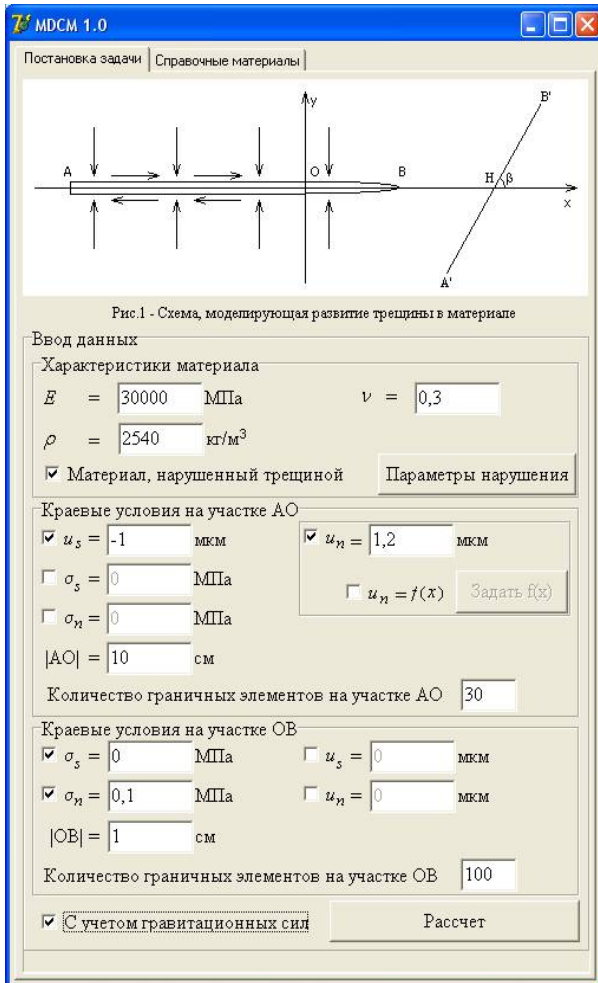


Рис.1 Основное диалоговое окно

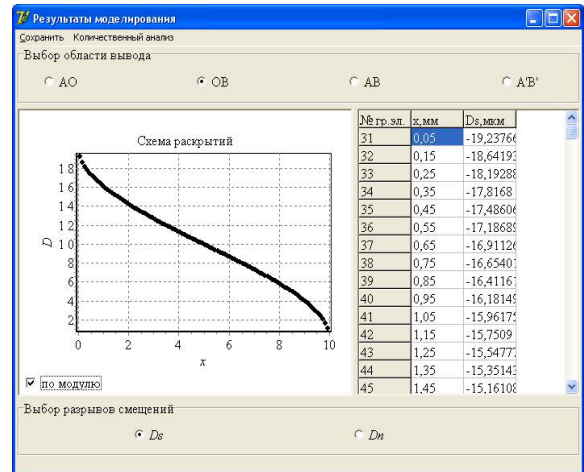


Рис.2 Диалоговое окно программы количественного анализа: сдвиговое раскрытие трещины OB

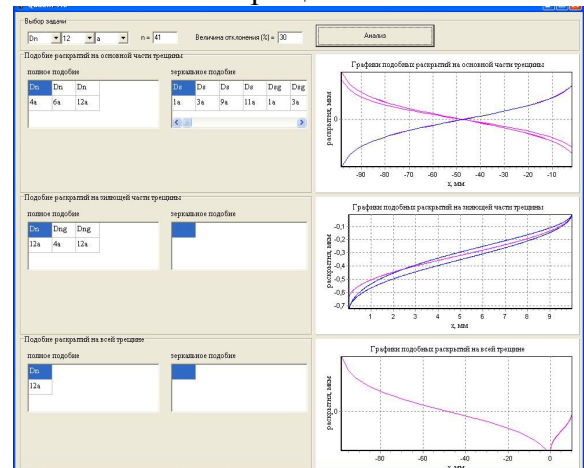


Рис.3 Диалоговое окно программы QualAn 1.0: субкомбинация 12а, r=30%

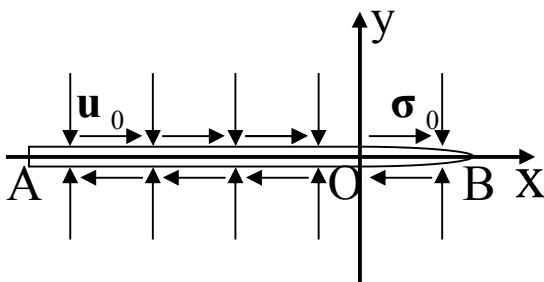


Рис.4 Геометрическая модель трещины смешанного типа: общий случай №1

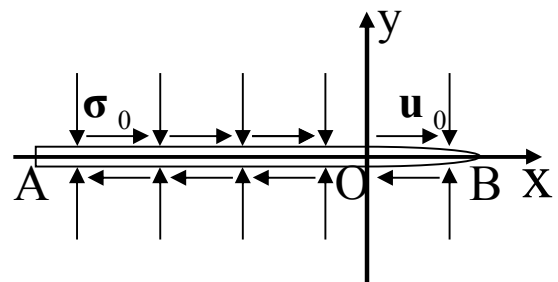


Рис.5 Геометрическая модель трещины смешанного типа: общий случай №2

В качестве ограничений на идентичность распределений были выбраны значения максимального по всей длине трещины (или ее части) отклонения

$$\delta_p(x) = \left| \frac{[D_p(x)]_{g=0} \pm [D_{p'}(x)]_{g \neq 0}}{[D_p(x)]_{g=0}} \right| \cdot 100\%, \quad p, p' = \{n, s\},$$

удовлетворяющего условию $\max(\delta_p) \leq r$. По результатам анализа определены субкомбинации краевых условий, для которых имеется полная ($r \approx 0.001\%$) и частичная ($r \approx 30\%$) идентичность распределения раскрытий. В четырех таблицах текущего параграфа приводятся подобные субкомбинации для раскрытий с учетом действия гравитационных сил Земли и в их отсутствии. Обнаружено, что 9 субкомбинаций определяют полную идентичность, и для них действие массовых сил можно считать несущественным. Профиль раскрытий двух из таких субкомбинаций приведен на Рис.6. Совпадение в любых других парах (не из числа 9 указанных) свидетельствует о существовании

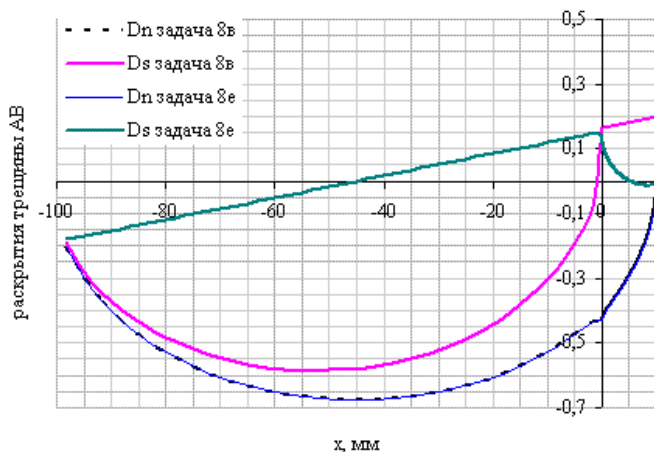


Рис.6 Раскрытия трещины в субкомбинациях 8(в,е)

идентичности распределения у неоднотипных разрывов (нормальных и касательных). Так, для всей трещины в одной из таблиц идентичны нормальные и сдвиговые смещения, а зеркальная – между их антиподами. Особое внимание обращается на сочетание, включающее Рис.6, т.к. для него имеется идентичность между однотипными и неоднотипными разрывами.

Функциональные возможности анализа идентичности распределения раскрытий позволяют сделать выводы об идентичности распределений:

- 1) однотипных разрывов с целью оценки влияние массовых сил на развитие трещины в основной и зияющей частях;
- 2) неоднотипных разрывов с целью поиска постановок задач, дублирующих результаты одного из типов, и ограничить число используемых субкомбинаций в рамках количественного анализа;
- 3) какой-либо субкомбинации одной из субкомбинаций нормального отрыва с целью использования аппроксимации нормальных и сдвиговых раскрытий в зияющей части трещины по аналитическим формулам Г.П.Черепанова.

В конце параграфа отмечается, что с улучшением качества идентичности растет количество соответствующих субкомбинаций. В частности, согласно работе Л.И Барона³ допустимая погрешность расчетов при разрушении горных пород не должна превышать 30% расхождения теоретических исследований и экспериментальных данных. В связи с этим в приложении А приводятся полные таблицы со 192 вариантами идентичности, в которых представлены субкомбинации, образуемые при $r = 30\%$.

В §2.5 выполнен качественный анализ решений краевых задач теории трещин со смешанными краевыми условиями. В рамках качественного

³ Барон Л.И. Кусковатость и методы ее измерения. М.: Изд. АН СССР, 1960, 124 с.

анализа решений выделен ряд параметров, варьирование которых определяет область решений. К ним отнесены механические свойства (плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона), длина трещины (общая АВ или ее участков), а также распределение граничных условий на участках АО и ОВ ("смещения-напряжения" или "напряжения-смещения").

Как показывают результаты расчетов, плотность материала имеет ничтожно малое воздействие на формирование смещения берегов раскрывающихся или закрывающихся трещин. Так, изменение плотности приводит к относительному изменению значений смещений на величину менее 10^{-3} . Поэтому в рамках представленного в параграфе качественного анализа ее значение зафиксировано значением $\rho=5000 \text{ кг/м}^3$, диапазон изменений модуля Юнга - от 10^6 до 10^{13} Па, коэффициента Пуассона - от 0.1 до 0.49. Приведенные диапазоны перекрывают подавляющее большинство механических свойств твердых тел, известных в настоящее время. Поэтому данные анализа справедливы не только для геоматериалов, но для тех упругих материалов, которые к ним потенциально могут и не относиться (металлы и др.).

Существенными ограничениями данных качественного анализа решений краевых задач теории трещин с СКУ к материалам, которые не относятся к геоматериалам, является применимость к ним модели математического разреза как геометрической модели трещины, а также наличие возможности смешанного распределения нагрузок на берегах трещины в указанном выше виде. По этой причине в рамках качественного анализа рассматривались макро- и микротрещины. Начальная длина участка АО - основной части трещины, - варьировалась от 1 мкм до 100 мм при соотношении для зияющей части трещины $ОВ=1/10 \text{ АО}$. По итогам анализа графических и табличных данных сделан ряд выводов о поведении нормальных и касательных смещений берегов трещины. В частности, сделан вывод, что величины нормальных смещений на берегах трещины монотонно уменьшаются с увеличением E и ν вне зависимости от учета тяготения, что свидетельствует о том, что более упругий материал сильнее сопротивляется нагрузке и с уменьшением длины трещины она не раскрывается даже при малых значениях модуля Юнга (например, для трещины с длиной $АО < 1 \text{ мм}$). Таким образом, при определенных сочетаниях модуля Юнга и коэффициента Пуассона трещина либо закрывается, либо раскрывается, что, в итоге, разрушает материал.

В третьей главе представлены избранные решения плоских краевых задач теории трещин со смешанными граничными условиями в геоматериалах при отсутствии действия массовых сил.

Решение интерполировалось вдоль всей трещины и аппроксимировалось в зияющей части. Для каждой модели приводятся таблицы раскрытий, вычисленные численно; графики распределения раскрытий берегов в зияющей части трещины при разном количестве граничных элементов, а также графики погрешности аналитического решения Черепанова (или численного решения при делении зияющей части трещины на 750 элемен-

тов) с численными решениями с меньшим количеством граничных элементов. На основе полученных результатов представлены аналитические соотношения и графики положения зон развития и стагнации трещины при критических значениях КИН 1-го и 2-го рода для песчаника

$$K_{Ic} = 2.15 \cdot 10^6 \text{ Н/М}^{3/2}, \quad K_{IIc} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Н/М}^{3/2}.$$

В §3.1 осуществляется аппроксимация раскрытия зияющей части трещины, вычисление КИН и сравнение результатов численного решения краевой задачи с аналитическими решениями Г.П.Черепанова.

Установлено, что влияние длины основной трещины на распределение нормальных раскрытий ничтожно мало, при $b \geq 10L$ (b - длина ОА, L - длина ОВ). Поэтому для всех задач главы 3 принято ограничение $b \geq 10L$. Показана полная идентичность численного решения методом разрывных смещений и аналитическим выражением Г.П. Черепанова. Для раскрытий, при $u_0, \sigma_0 \neq 0$, в работе Г.П. Черепанова найден функционал распределения раскрытий берегов трещины в виде

$$D(x) = \frac{-4u_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \right] + \frac{2(1-\nu)\sigma_0}{G} \sqrt{x(L-x)}.$$

Соответственно, вычисленные по формулам А.М. Линькова КИН 1-го и 2-го рода имеют вид

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2Gu_0}}{\sqrt{\pi L}(1-\nu)} + \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi L}{2}}.$$

В качестве примера на Рис.7 представлены границы раздела зон развития и стагнации трещины, полученных из решения уравнения

$$K_I(u_n^0, \sigma_n^0) = K_{Ic}.$$

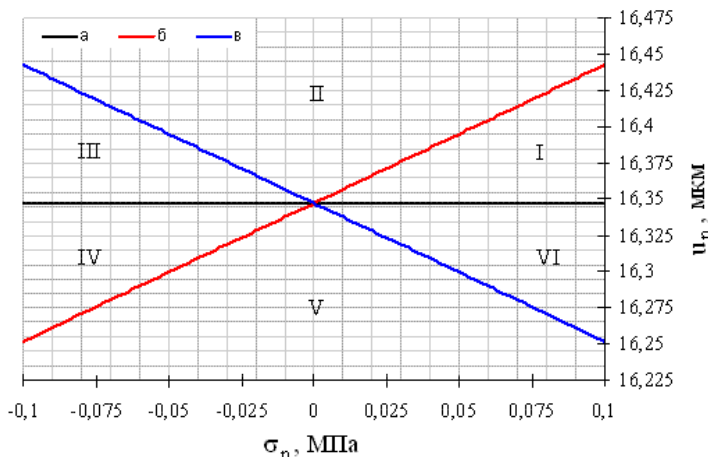


Рис.7 График функций $u_n = f(\sigma_n, K_{Ic})$.

Для построения прямой «а» принималось $\sigma_0 = 0$, для прямой «б» $\sigma_0 > 0$ и прямой «в» $\sigma_0 < 0$. Зоны развития трещины находятся в секторах I-III, зоны стагнации – в остальных. Общей зоной развития для всех является зона II, а зоной стагнации – зона V.

В §3.2 рассматривается модель развития трещины отрыва с различной длиной основной и зияющей частей трещины и переменной длиной всей трещины. Распределение нормального раскрытия определено с помощью аппроксимирующей функции в виде

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) [1 - \zeta \cdot \exp(-\varpi b/L)],$$

где ζ, ϖ - аппроксимирующие коэффициенты.

В §3.3 представлена модель развития трещины в трещиноватом массиве при постоянной сумме длин зияющей части и расстояния до наклонной трещины $A'B'$ (Рис.8).

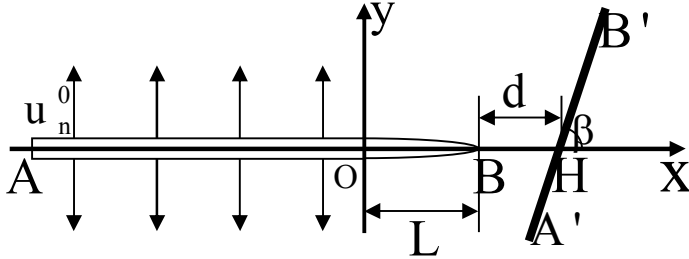


Рис.8 Геометрическая модель трещины в трещиноватом массиве

Аппроксимирующая зависимость нормального смещения зияющей части трещины OB для $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ имеет вид

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) [1 - \phi(d, L) \cdot \exp\{-\psi(d, L)d/L\}]$$

причем аппроксимирующая функция, образованная в свою очередь двумя аппроксимирующими функциями $\phi(d, L)$ и $\psi(d, L)$, образует поверхность, для всех точек которой выполняется условие $L + d = \text{const}$. Поскольку аппроксимирующая функция не зависит от координат, то КИН 1-го рода здесь прямо пропорционален ей. Распределение нормальных раскрытий вдоль зияющей части трещины OB при $\beta = 30^\circ$ и вдоль трещины $A'B'$ приведено соответственно на Рис.9 и Рис.10.

Из Рис.9 видно, функция распределения нормальных раскрытий, полученная методом разрывных смещений, вблизи вершины трещины пересекается с аналитическим и в дальнейшем расходится. Такой же вид графиков характерен и при других углах β и расстояниях d .

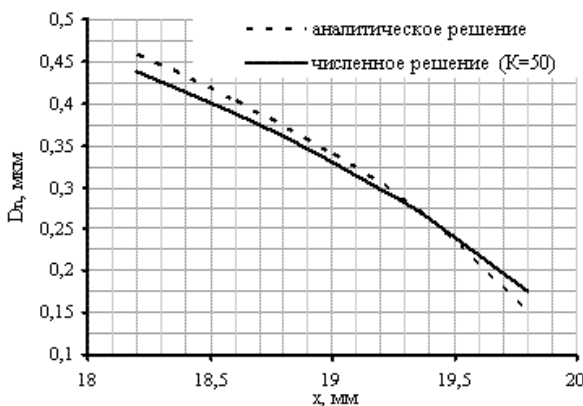


Рис.9 Нормальное раскрытие зияющей части трещины OB

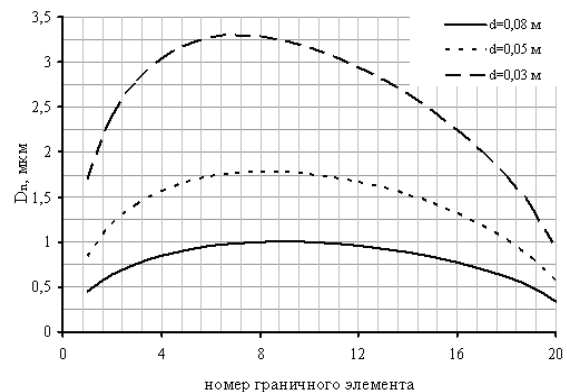


Рис.10 Нормальное раскрытие трещины $A'B'$ при различных d

Для наклонной трещины уменьшение расстояние между трещинами приводит к смещению максимума функции распределения раскрытия в сторону ее устья и увеличению его значения. Отсюда следует, что в тре-

щиноватом массиве близкое расположение трещин способствует увеличению разрывов берегов и формированию развитой системы трещин, ускоряющей разрушение геоматериала.

В §3.4 представлено решение краевой задачи о развитии трещины, в которой граничные условия заданы линейными и параболическими функциями нормальных смещений берегов основной части, заданной функцией вида

$$u(x, u_n) = \varphi_1(u_n)x^2 + \varphi_2(u_n)x + \varphi_3(u_n).$$

Функция распределения раскрытий берегов трещины имела вид

$$D_n(x, u_n^0) = D_n^{(1)}(x) \left\{ A_w \left[u(x, u_n) / u_n^0 \right] + B_w \right\}, \quad w = 1, 2, 3,$$

В отличие от предыдущей задачи здесь аппроксимирующая функция зависит от координаты. Поскольку длина зияющей части является конечным числом, то величина КИН 1-го рода в рамках аппроксимирующей функции имеет линейную ($w=1,2$) или квадратичную ($w=3$) зависимость от L . В связи с этим при построении зон развития и стагнации трещины решается уравнение вида $K_I(u_n^0) = K_{Ic}$, из которого нетрудно перейти к уравнению $u = f(u_n^0, K_{Ic})$ и определить профиль нормальных смещений на берегах трещины, способствующей развитию или стагнации трещины.

В §3.5 представлено решение задачи о развитии трещины в условиях сжатия и сдвига ее берегов. Функции распределения нормальных и касательных раскрытий берегов трещины по результатам численного решения получены в виде

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) \left[\kappa_1 \frac{u_s^0}{u_n^0} - \kappa_2 \right], \quad D_s(x) = D_s^{(1)}(x) \left[\kappa_2 \frac{u_n^0}{u_s^0} + \kappa_1 \right],$$

где κ_1, κ_2 - коэффициенты аппроксимации. Функциональная зависимость раскрытий идентична представленной на Рис.9.

Поскольку аппроксимирующие функции не зависят от координат, то КИН 1-го и 2-го рода пропорциональны им и имеют вид произведения аппроксимирующей функции. В этом случае, при критических КИН, имеем систему уравнений

$$K_I(\mathbf{u}_0) = K_{Ic}, \quad K_{II}(\mathbf{u}_0) = K_{IIc}.$$

Из решения системы нетрудно получить пару функций $u_n^0(u_s^0)$ (или в обратной функциональной зависимости), разграничивающих положение зон развития и стагнации трещины. На Рис.11 показаны зоны развития и стагнации трещины. Поскольку сжатие берегов происходит только при $u_n^0 > 0$, то верхняя полуплоскость разделена на 4 зоны. Зоны развития занимают область над прямыми линиями. Поэтому развитие трещины в зависимости от соотношения между нормальными и сдвиговыми смещениями может

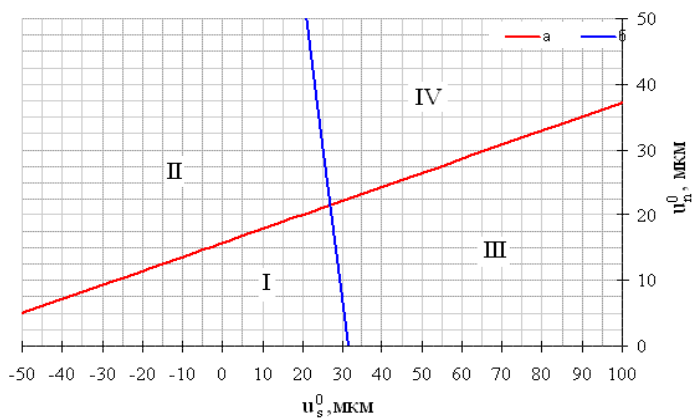


Рис.11 Функции $u_n^0 = u_n^0(u_s^0)$ при K_{1c} и K_{1cs} .

происходить по 4-м сценариям. Зона I (под прямыми) образует зону стагнации. В зоне II (слева между прямыми) развитие происходит только под действием нормальных смещений, в зоне III (справа между прямыми) – только под действием сдвиговых смещений. В зоне IV (над обоими прямыми) развитие

трещины происходит в результате совместного действия нормальных и сдвиговых смещений на основной части трещины.

В §3.6 рассмотрена модель развития плоской трещины в общем случае (Рис.4,5). Основой для аппроксимации служат функции, введенные в первое слагаемое функционала, а также дополняющие второе слагаемое множители для соответствующих раскрытий

$$\tau_n = m_1 \sigma_s^0 + m_2 \sigma_n^0, \quad \tau_s = -\tau_n,$$

где m_1, m_2 - коэффициенты аппроксимации.

В заключении представлены основные результаты работы, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

В приложении А приведены таблицы идентичности субкомбинаций.

В приложении В приведен фрагмент листинга программного комплекса моделирования раскрытия трещины.

Основные результаты работы

1. Предложенный алгоритм решения плоских краевых задач теории трещин включает численное решение краевой задачи со смешанными граничными условиями, аналитическую аппроксимацию смещений берегов трещины и формулы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода для сплошных упругих и нарушенных трещиноватостью тел.

2. Создан программный комплекс для моделирования раскрытия берегов трещин, который позволяет получать численное решение краевых задач теории трещин в смешанной постановке методом разрывных смещений, проводить количественный анализ и анализ идентичности распределений этих раскрытий в присутствии и отсутствии массовых сил.

3. Выполнен анализ идентичности распределений раскрытий берегов трещин смешанного типа под действием массовых сил и в их отсутствии для всех субкомбинаций трещин в песчанике. По результатам анализа определены субкомбинации граничных условий, для которых имеется

полная ($r=0.001\%$) и частичная ($r=30\%$) идентичность распределения раскрытий.

4. Проведен качественный анализ решений краевых задач со смешанными граничными условиями в широком диапазоне изменений значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона и исследованы закономерности изменения функций нормальных и касательных смещений берегов трещины с учетом и без учета массовых сил.

5. Получены численные решения избранных задач теории трещин смешанного типа в отсутствие действия массовых сил. Аппроксимированы функции нормальных и касательных смещений берегов трещины и получены аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Полученные результаты могут в дальнейшем использоваться при решении задач для трещиноватых тел конечных размеров, а также имеющих дискретную структуру (зернистые, пористые и т.п.).

Публикации по теме диссертации

в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Математическая модель хрупкого разрушения геоматериалов в смешанной постановке // Вестник ОГУ. 2010. № 4. С. 119 – 122.

2. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Численное определение коэффициентов интенсивности напряжений в задачах со смешанными краевыми условиями // Вестник СамГУ (Естественнонаучная серия). 2009. № 6(72). С. 118 – 129.

3. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Математическая модель расклинивания материала с различной длиной основной и зияющей трещины // Вестник ОГУ. 2010. № 9. С. 55 – 58.

4. Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Математическая модель развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Вестник СамГТУ (Физико-математическая серия). 2011. № 1(22). С. 276 – 281.

5. Спиридонова Е.В. Численно-аналитическое решение плоских задач теории трещин в смешанной постановке // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. №1(23). С. 39–49.

в других научных изданиях

6. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Моделирование развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Вестник ОГУ. 2007. № 9. С. 195 – 198.

7. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Критерии роста трещины разрыва от различных функции нормальных перемещений точек берегов трещины // Современные проблемы механики и прикладной математики: сб.

науч. тр. межд. школы-семинара. ВГУ. Воронеж: Научная книга, 2007. С. 284 – 288.

8. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Моделирование развития трещины разрыва в материале, нарушенной природной трещиной // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сб. материалов всерос. науч.-практ. конф. Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. С. 167 – 172.

9. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами // Вестник ОГУ. 2008. №. 5. С.111 – 114.

10. Спиридонова Е.В., Полкунов Ю.Г. Численные методы вычисления критериев роста трещин в смешанных задачах теории упругости // Вестник ОГУ. 2008. № 11. С. 127 – 131.

11. Спиридонова Е.В. Моделирование развития зияющей трещины в задачах со смешанными краевыми условиями // Математика. Информационные технологии. Образование: сб. науч. тр. Оренбург: ОГУ, 2008. С. 61 – 64.

12. Спиридонова Е.В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений при смешанном типе нагружения трещины // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Ч. 2: сб. трудов межд. конф. – Воронеж: Изд. – полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2009. С. 182 – 189.

13. Спиридонова Е.В. Алгоритм расчета коэффициентов интенсивности напряжений для разных типов задач // Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии: сб. материалов четвертой Всерос. науч.-практ. конф. Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2009. С. 286 – 292.

14. Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Математическая модель развития расклинивающей трещины в нарушенном материале // Математическая физика и ее приложения: материалы второй межд. конф. Самара: ООО «Книга», 2010. С. 317.

15. Спиридонова Е.В. Численное решение задачи о развитии трещины в смешанной постановке // Актуальные проблемы механики, математики, информатики: сб. тезисов науч.-практ. конф. Пермь: ПГУ, 2010. С. 211.

16. Спиридонова Е.В. Математическая модель раскрытия трещины направленного разрыва в нарушенном материале // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. науч. ст. десятой всерос. науч. конф. – Новокузнецк: НФИ ГОУ ВПО КемГУ, 2010. С. 71-78.

17. Спиридонова Е.В. Математические модели развития трещины в задачах со смешанной постановкой; Оренбургский государственный университет. Оренбург, 2014. 108 с. Деп. в ВИНТИ 03.07.14, № 196-В2014.

18. Спиридонова Е.В. Моделирование раскрытия берегов плоской трещины смешанного типа // Современные проблемы математики, механики, информатики: сб. материалов международной науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 414-420.

19. Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Программный комплекс для численного решения плоских задач теории трещин со смешанными краевыми условиями. Свидетельство о регистрации программного средства № 2015616382 от 09.06.2015.

Автореферат разрешён к печати диссертационным советом
Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
13.07.2015г.

Подписано в печать 13.07.2015 г. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,25. Тираж 100 экз. Заказ № 2379

Отпечатано в отделе полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38